



GÖTEBORGS UNIVERSITET

# Större, mindre eller lika stor chans

## - En Learning study i sannolikhet

Emelie Hoffer & Sanna Ogenbrant

LAU390

Handledare: Johan Häggström

Examinator: Maria Svensson

Rapportnummer: 089



GÖTEBORGS UNIVERSITET

## **Abstract**

### **Examensarbete inom Lärarprogrammet LP01**

**Titel:** Större, mindre eller lika stor chans - En Learning study i sannolikhet

**Författare:** Emelie Hoffer & Sanna Ogenbrant

**Termin och år:** VT 2014

**Kursansvarig institution:** Institutionen för sociologi och arbetsvetenskap

**Handledare:** Johan Häggström

**Examinator:** Maria Svensson

**Rapportnummer:** 089

**Nyckelord:** Learning study, variationsteori, sannolikhet, årskurs 3, matematik

Syftet med studien är att med hjälp av variationsteori och metoden Learning study utveckla kunskapen om undervisning i sannolikhet genom att ta reda på de kritiska aspekterna samt att undersöka vilka variationsmönster som gynnar elevernas inläring.

Vi har använt oss av metoden Learning study och vårt insamlade material kommer således från de tre försökslektioner som vi har hållit samt tillhörande planering och analys. Vårt lärandeobjekt för försökslektionerna har varit att lära eleverna i vilka situationer som det är större, mindre eller lika stor chans för ett visst gynnsamt utfall gentemot alla möjliga utfall.

Vi har, genom vår undersökning, funnit svar på våra frågor angående kritiska aspekter och variationsmönster. De kritiska aspekter som vi upptäckte att eleverna i de tre försöksklasserna behövde få syn på var, att antalet möjliga utfall påverkar sannolikheten för ett gynnsamt utfall, att sidornas markeringar på en tärning inte påverkar slagets utfall, att dra en kula innebär att man drar en kula på måfå samt att sannolikhetsförhållandet mellan två färger (färgade kulor) inte påverkas av de övriga färgerna i skålen.

Två variationsmönster har, som vi kan se, varit framgångsrika. Det första innebär att vi har haft två mängder med kulor varav den ena har varit invariant medan den andra har varierat från att vara obefintlig till att vara störst. Det andra framgångsrika variationsmönstret innebär att vi hade en invariant totalmängd och varierade kulornas sammansättning inom mängden för att synliggöra en situation som innebär lika stor chans.

Vi ser en tydlig koppling mellan vårt arbete och vår kommande yrkesroll då Learning study är en metod för att arbeta med kompetensutveckling inom lärarkåren vilket är positivt på såväl individnivå som för yrkesgruppen.

# Innehållsförteckning

1. Inledning	1
1.1 Bakgrund	1
1.2 Syfte och problemformulering	3
2. Teoretisk anknytning	3
2.1 Sannolikhet	3
2.2 Learning study	6
2.3 Variationsteori	7
2.4 Begreppsförklaringar	7
3. Design och metod	9
3.1 Learning study	9
3.2 Metodens etiska aspekter	10
4. Tillvägagångssätt	11
4.1 Lärandeobjekt	11
4.2 Hypotetiskt kritiska aspekter	11
4.3 För- och eftertest	11
4.4 Planering av försökslektion 1	14
4.5 Planering av försökslektion 2	16
4.6 Planering av försökslektion 3	19
5. Resultatredovisning	21
5.1 Resultat av undervisningens utveckling	21
5.2 Resultat av forskningsfrågor	23
6. Diskussion	25
6.1 Metoddiskussion	25
6.2 Resultatdiskussion	28
6.3 Fortsatt forskning	30
Referenslista	32
Bilaga 1	34
Bilaga 2	35
Bilaga 3	39
Bilaga 4	43

# 1. Inledning

Under inledningen kommer vi att beskriva varför vi har valt att genomföra just denna studie. Vi kommer att ge en personlig samt en teoretisk motivering till vårt ämnesval.

Det var inte självklart inom vilken matematisk gren som arbetet skulle genomföras. När sannolikhet nämndes för första gången valde vi först bort det eftersom vi själva inte ansåg att sannolikhet var ett så viktigt område. Vi diskuterade varför vi hade denna uppfattning och kom fram till att det kunde bero på vår utbildning. Dels vår grundskoleutbildning, men även under universitetets matematikkurs där sannolikhetslära har getts lite utrymme i undervisningen. På grund av detta väcktes vårt intresse kring ämnet.

Arbetets syfte är att formulera kritiska aspekter och framgångsrika variationsmönster i undervisningen inom sannolikhetsämnet, menar vi att studien har en tydligt relevans för både utbildningsvetenskapen och för den didaktiska utvecklingen.

Enligt gällande läroplan, Lgr11, ska eleverna i slutet av årskurs 3 kunna föra matematiska resonemang om rimlighet och slump och i det centrala innehållet anges att detta ska behandlas i slumpmässiga händelser i experiment och spel. Vi samtalade inför studien med klassernas respektive lärare och alla tre menade att eleverna inte hade blivit undervisade om sannolikhet. Här ska även tilläggas att studien genomfördes under vårterminen och att eleverna således förväntades utveckla ovan nämnda förmågor under terminens resterande tid. Ett syfte med undervisningen i matematik är att eleverna “[...] utvecklar kunskaper om matematik och matematikens användning i vardagen och inom olika ämnesområden.” (Skolverket, 2011a, s 62). Vi menar att sannolikhet är något eleverna kommer i kontakt med i vardagen, kanske framförallt begrepp så som chans, slump eller rimlighet. Med utgångspunkt i den forskning som Jones (2007) sammanställt, angående elevers förståelse av sannolikhet, tror vi att detta kan innebära att eleverna utvecklar felaktiga och diffusa begreppsuppfattningar som inte stämmer överens med sannolikhetslärans definitioner av begreppen. Vi menar att detta är ett argument för att sannolikhetsundervisningen är betydelsefull och därför bör uppmärksammas i skolans tidigare år.

## 1.1 Bakgrund

Motivet till att genomföra en studie som behandlar hur undervisning i sannolikhet ska utformas härstammar främst från insikten om den begränsade forskningen som genomförts inom detta (Jones, 2007). Vad vi kan finna av dokumenterade Learning study på *Learning study-webben* (NCM, u.å.) så har det bara genomförts en sådan inom sannolikhetsämnet

tidigare, den genomfördes med elever i årskurs 8. Vår studie har istället inriktat sig på elever i årskurs 3, eftersom det bland forskare finns en samsyn om att undervisningen i sannolikhetsämnet måste påbörjas från tidigare åldrar.

There is a broad consensus that the teaching of probability must begin early in order to build sound intuitions and that such efforts must be grounded in experience. [...] However, mere experience is not sufficient, as the research on faulty intuitions and fallacious reasoning amply shows, and a major challenge to the field is harvesting what is known from this research to inform teaching. (Greer & Mukhopadhyay, 2005 s. 314-315)

Greer & Mukhopadhyay (2005) påpekar att det är först under slutet av 70- och början av 80-talet som sannolikhet har blivit en del av läroplanerna i flera länder. I Sverige nämns sannolikhet (som lärandemål) för första gången i 1980 års upplaga av läroplanen, Lgr80 (Skolöverstyrelsen, 1980).

Jagers (2005) menar att han kan se stor skillnad i unga människors resonemang kring risk och chans sedan sannolikhet infördes i läroplanen, men att han tror att det kan drivas en bra bit längre och göra skolmatematiken relevant för vanliga människor.

Med utgångspunkt i ovanstående citat av Greer & Mukhopadhyay (2005) kan vi också konstatera behovet av praxisnära forskning inom ämnet, det vill säga forskning som bedrivs i nära anslutning till den pedagogiska verksamheten. Enligt Marton (2003) lämpar sig *Learning study* och *variationsteorin* (innehörden av dessa begrepp kommer att tydliggöras under rubriken *Teoretisk anknytning*) för denna typ av forskning.

Valet av metod kan ifrågasättas då den forskargrupp som ägnar sig åt att utveckla Learning study är begränsad i antal. Detta innebär att all litteratur och mycket av den forskning som rör metoden är författad och genomförd av denna grupp. Metoden har dock rötter i den mer etablerade Lesson study som har sitt ursprung i Asien. Asiatiska länder visade vid upprepade tillfällen mycket goda resultat i internationella mätningar i matematik, vilket medförde att amerikanska forskare (ex. Stevenson & Stigler, 1992; Stigler & Hiebert, 1999) vände blicken österut för att få svar på vad som gjorde deras undervisning så framgångsrik. Dessa forskare fann bland annat en kontinuerlig kompetensutveckling och en kollegial utveckling av undervisningen, vilka bidrog till en bättre undervisning och bättre resultat (Häggström, Bergqvist, Hansson, Kullberg & Magnusson, 2012). Utifrån detta började forskare utarbeta metoden Learning study. Metoden prövades för första gången i Sverige 2003 och har sedan dess visat goda resultat.

Utvärderingen visar att Learning study är en effektiv metod för att förbättra undervisningen och därmed lyfta elevernas kunskaper i matematik. De intervjuade lärarna är också överens om att arbetet med metoden varit den bästa kompetensutveckling de varit med om. Det mest givande i hela processen för dem var möjligheten att tillsammans med kollegor få reflektera över hur de ska presentera matematikinnehållet för elever i klassrummet. (Skolverket, 2012, s. 32).

## 1.2 Syfte och problemformulering

Med utgångspunkt i inledningen och bakgrunden är syftet med studien att genom variationsteori och med metoden Learning study utveckla lärares kunskap om undervisning i sannolikhet, detta ska uppnås genom att besvara följande frågor:

- Vilka kritiska aspekter kan vi urskilja kring lärandeobjektet, när är det *större*, *mindre* eller *lika stor chans*?
- Vilka variationsmönster gynnar elevernas kunskapsutveckling inom sannolikhet?

## 2. Teoretisk anknytning

Här kommer vi att beskriva den tidigare forskningen som genomförts från utgångspunkter med relevans för studien: sannolikhet, Learning study samt variationsteori. Avslutningsvis förklarar vi relevanta begrepp som vi använder oss av i studien.

### 2.1 Sannolikhet

Först kommer vi att presentera en kortfattad historik kring sannolikhetsforskningen, där efter beskriver vi forskning om elevers lärande av sannolikhet och slutligen den forskning som finns om undervisning av sannolikhet.

Jones har gjort en sammanställning av forskning som bedrivits inom ämnet sannolikhet i antologin *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Lester, 2007). Denna antologi omfattar all forskning inom matematikundervisning som publicerats mellan åren 1992-2007. Denna sammanställning kommer därför att utgöra en central del av vår teoretiska anknytning.

Enligt Jones (2007) fungerade många nordamerikanska forskare mellan 1950-talet och fram till 1980-talet som banbrytare inom utvecklingen av undervisning i sannolikhet. Han påpekar också att all forskning som fram till dess gjorts och senare gjordes byggde på teoretiska modeller om kognitiv utveckling. Denna forskning bedrevs av psykologer med intresse för människors inlärningsbeteende och val när de ställs inför uppgifter som innebär osäkerhet. Jones (2007) menar även att matematiklärare under denna period hade en stark känsla av att denna forskning var av betydelse för inläring och utbildning i sannolikhet och dessutom för ämnets omfattning inom skolans verksamhet och i läroplaner (Jones, 2007). Och sedan 1990-talet har forskningen kring undervisningen om sannolikhet fokuserat mer på hur människor uppfattar och tänker kring situationer som involverar slump.

Forskning om hur elever tänker om slump har pågått under fyra decennier och har i stort sett fokuserat på tre aspekter: slumpmässiga blandningar, slumpmässiga fördelningar och slumpmässigt urval (Jones, 2007). I sannolikhetsundervisningens forskningshistoria går att finna flera studier med relevans för vårt arbete och de kommer nu att presenteras.

Konold, Pollatsek, Well, Lohmeier & Lipson. (1993) och Watson, Collins och Moritz (1997) genomförde två olika studier som båda visade att elever när de ställs inför uppgifter som innebär att de ska ange *störst* eller *lika stor chans* ofta svarar rätt, men att de inte alls resonerar kring de numeriska orsakerna till detta. Dessutom beskriver de båda studierna att eleverna verkar se *lika stor chans* som ett uttryck för slump, att vad som helst kan hända.

Flera studier som inriktar sig på sannolikhetsituationer har genomförts med yngre barn. Överlag har dessa studier inneburit att eleverna blivit ombedda att identifiera det mest eller minst troliga utfallet. I ett försök att undvika den problematik som Konold m fl (1993) och Watson m fl (1997) påpekar i sina studier, ombeds eleverna att rättfärdiga sina svar genom både kvantitativa och kvalitativa svar.

Watson och Moritz (2003) genomförde en intervjuundersökning som omfattade 108 barn mellan 5 och 14 år. Eleverna fick frågor om tärningens rimlighet. Statistiken från studien visade att det finns ett samband mellan elevernas föreställningar och deras strategier för att bedöma tärningens rimlighet, sambandet syns men är inte starkt. Forskarna Watson och Moritz (2003) genomförde samma studie efter 3-4 år med 44 av de elever som varit med tidigare, denna studie bekräftade det tidigare resultatet. De kunde också konstatera att elevernas föreställningar och strategier kring tärningen kan innebära dilemman för undervisning med tärningen som verktyg. Dessa slutsatser är relevanta för vår studie då en av frågorna vi söker svar på är just vilka kritiska aspekter som finns kring sannolikhets- och förmågan att avgöra när det är *störst*, *minst* eller *lika stor chans*.

I vår studie medverkar elever i årskurs 3. Som vi presenterat under rubriken *Inledning* så är de delar i styrdokumentet som behandlar sannolikhets- ytterst få vad gäller kursplanen i matematik för årskurs 3. Fischbein, Pampu and Minzat (1970) konstaterar att elever i åldrarna 9-10 år efter att ha fått kortfattade instruktioner kan uppskatta slump genom att jämföra mängder och att förstå begreppet proportionalitet. De menar att detta är ett argument för att påbörja undervisningen om sannolikhets- redan i skolans tidigare år.

I följande stycken presenteras de forskningsresultat med relevans för hur sannolikhetsundervisning kan genomföras. Jones (2007) konstaterar att forskningen om hur sannolikhetsundervisningen bör utformas är relativt begränsad men att litteraturen erbjuder vissa riktlinjer. Pratts (2005) arbete med *Chans-maker* har genererat fyra pedagogiska riktlinjer för instruktioner av sannolikhets-. Den första avser uppgiftens konstruktion och innebär två konstruktioner; syfte och nytta för eleverna, den andra avser elevernas personliga

gissningar, den tredje innebär att sannolikhet bör instrueras som storskaliga experiment och den fjärde riktlinjen avser systematisk variation av sammanhang.

Castro (1998) genomförde forskning som berör hur sannolikhetsinnehållet bör presenteras. Han menar att det finns två sätt att presentera sannolikhet, dessa benämns som *traditional* och som *conceptual change*. Presentationen som kallas *traditional* är linjär och tar inte hänsyn till elevernas missuppfattningar om sannolikhet. *Conceptual change* innebär att man försöker tvinga fram elevernas tankar och uppmuntra till reflektion kring sannolikhet.

För att lyckas presentera sannolikhet som *conceptual change* menar Castro (1998) att följande behov finns.

- Behovet av att elevernas föreställningar inkluderas och behovet för förståelse vad gäller sannolikhet i beräkningar.
- Behovet av att ge eleverna experimentella erfarenheter som framkallar de nödvändiga kognitiva konflikter för att eleverna ska utveckla sin förståelse från personlig till vetenskaplig.
- Behovet av att integrera specifik träning för att resonera kring sannolikhet.

Den andra frågan vi söker svar på är vilka variationsmönster som är framgångsrika, därför är det viktigt att veta vad den tidigare forskningen säger om utformning av undervisning.

Skolverket, Nationellt centrum för matematikutbildning (NCM) och Institutionen för didaktik och pedagogik vid Göteborgs universitet ligger bakom en webbplats som utgör en kunskapsbank för Learning study och Lesson study. På *Learning study-webben* (NCM, u.å.) finns en sammanställning över Learning study som har genomförts i Sverige. En av dessa studier handlar om sannolikhet och genomfördes i årskurs 8. Detta är den enda Learning study om sannolikhet som vi har funnit. Syftet med denna studie var att introducera begreppet sannolikhet i enkla slumpsituationer och att få eleverna till att förstå innebörden av slump/icke-slump, gynnsamma, ogynnsamma och möjliga utfall samt relationen mellan gynnsamma och ogynnsamma utfall. Denna studie fann följande kritiska aspekter:

- Betydelsen av antalet gynnsamma utfall
- Betydelsen av antalet möjliga utfall
- Att sannolikheten är förhållandet mellan gynnsamma utfall och antalet möjliga utfall.
- Att sannolikheten kan vara samma även om det totala antalet varierar så länge förhållandet är konstant. (NCM, u.å.)



## 2.2 Learning study

Här presenterar vi kortfattat den tidigare genomförda forskningen som finns angående metoden Learning study.

En Learning study innebär både en kompetensutveckling och ett utvecklingsarbete i praxisnära sammanhang. Syftet med en Learning study är utveckling av elevers såväl som lärares lärande. Bergqvist och Echevarría (2011) menar att Learning study ger lärare möjlighet att tillsammans utveckla professionens kärna, det vill säga undervisningen. Lo (2014) menar att den även bidrar till att skapa en gemensam plattform för lärare och forskare vad gäller ett gemensamt språk, ett gemensamt tillvägagångssätt och en gemensam organisation. En Learning study kan också skapa en kontext för professionellt lärande grundat på praktisk verksamhet (Bergqvist och Echevarría, 2011).

År 2003 genomfördes den första Learning studyn i Sverige. Sedan dess har metoden enligt Häggström m fl. (2012) fått en stor spridning i landet och många av de forskningsresultat av Learning study som presenteras visar goda resultat.

På initiativ av skolverket genomfördes 2009-2011 ett utvecklingsarbete för att förbättra den Svenska skolans matematikundervisning. Då användes bland annat Learning study som metod. I utvärderingen av detta arbete (Skolverket, 2011b) presenteras de involverade lärarnas åsikter om metoden och samtliga av dessa upplevde att den innebar en stor förändring gentemot tidigare arbetssätt. De flesta av de medverkande lärarna upplever att Learning study ledde till förbättringar för utövandet av undervisningen i matematik. Utvärderingen visar även att eleverna som deltar i projektet når målen i högre utsträckning än tidigare (Skolverket, 2011b).

Learning study ger lärare tillfälle att forska kring sin egen undervisning genom systematiska reflektioner, revidering och utprovning (Häggström m fl. 2012). I en Learning study kan man se både kortsiktiga och långsiktiga resultat. På kort sikt handlar resultatet om de deltagande elevernas villkor för lärande, de kritiska aspekterna och om vad som inte får tas för givet i undervisningen, men det kan även gälla lärarnas förståelse av ämnesinnehållet, och deras syn på elevernas bild av ämnesinnehållet. På längre sikt kan arbetet medföra att begreppen från variationsteorin bidrar till att förbättra lärarnas arbete med planering, genomförande och utvärdering av undervisningen (Häggström m fl. 2012).

Förhållandet mellan Learning study och variationsteori är starkt, Bergqvist och Echevarría (2011) menar till och med att variationsteorin *är* den teoretiska utgångspunkten i en Learning study. Därför menar vi att de utvärderingar som gjorts av Learning study också är utvärderingar av variationsteorin och på grund av det kommer följande stycke att fokusera på variationsteorins bakgrund och dess innebörd snarare än att redogöra för tidigare forskning om teorin.

## 2.3 Variationsteori

Variationsteorin härstammar från fenomenografin (Lo, 2014). Lo menar att fenomenografin intresserar sig för hur människor upplever samma sak eller fenomen. Marton och Booth (2000) beskriver och kopplar det till den pedagogiska verksamheten på följande sätt: ”Fenomenografin har sin grund i ett intresse för att beskriva fenomen i världen såsom andra betraktar dem, och att avtäckta och beskriva variationer i det avseendet, i synnerhet i pedagogiskt sammanhang. ” (Marton och Booth 2000, 146). Det är alltså ur dessa tankar som variationsteorin härstammar.

Variationsteorin är den teoretiska utgångspunkten i en Learning study och den bygger på att lärande sker med hjälp av urskiljning av nya aspekter. För att förstå vad något är behöver vi även se vad det inte är (Bergqvist & Echevarría, 2011).

En medvetenhet om ett enskilt drag kan inte förekomma utan en medvetenhet om skillnader mellan dragen, variationer. Det kan inte finnas urskiljning utan upplevda skillnader, och skillnad kan inte upplevas utan samtidig upplevelse av åtminstone två saker som skiljer sig åt. Exempelvis, om vi ska lära ett barn vad färgen röd är, så måste vi samtidigt visa saker som är röda och som inte är röda. För att kunna isolera den kritiska aspekten (färgen röd) så behöver vi hålla andra faktorer konstanta (invarianta), till exempel föremålet. Vi kan visa barnet en röd boll, och sedan en grön boll. I nästa skede behöver vi också få barnet till att generalisera det upplevda till andra föremål. Då kan vi visa flera olika röda föremål och behåller i detta fall färgen konstant (Lo, 2014).

Synen på lärande inom variationsteorin innebär att lärande alltid är inriktat mot ett objekt och att vi inte kan tala om lärande utan att ange lärandeobjektet (Lo, 2014).

## 2.4 Begreppsförklaringar

Här förklarar vi relevanta begrepp som vi använder oss av i studien.

### 2.4.1 Lärandeobjekt

För att förstå vad begreppet lärandeobjekt innebär är det nödvändigt att skilja det från begreppet lärandemål, då dessa är lätta att förväxla. Med lärandemål menas det som ska uppnås, målet, den förändring som ska ha skett hos eleverna. Lärandemålet står i direkt relation till bedömning då det är målet med undervisningen och det är just detta som ska utvärderas och bedömas. Eftersom lärandemålet fokuserar på slutet av processen och inte på vägen dit innebär det att lärandemålet inte säger något om *vad* som krävs eller *hur* det ska uppnås utan bara *att* det ska ske. (Maunula, 2011; Lo, 2014). Lärandeobjektet utgörs däremot av det innehåll som behandlas i undervisningen, det som behöver uppmärksammas och

bearbetas för att eleverna ska kunna nå fram till lärandemålet. "Med termen lärandeobjektet försöker man beskriva vad eleverna måste lära för att nå lärandemålet." (Häggström m fl, 2012, s 9)

När lärare väljer ett lärandeobjekt så måste de ställa sig frågan *varför* eleverna behöver lära sig det tänkta objektet (Lo, 2014). Tre frågor bli relevanta:

Vad kan elever göra med den kunskap de får?

Vad kan lärandet av objektet göra för att hjälpa dem i deras framtida lärande?

Vilka färdigheter kan elever utveckla genom att lära sig detta lärandeobjekt?

Genom undervisningsprocessen förbättras lärarnas förståelse för lärandeobjektet. Lärandeobjektet är därför inte något oföränderligt utan något dynamiskt som kan komma att förändras och anpassas under studiens gång (Lo, 2014). När lärarens förståelse för lärandeobjektet fördjupas så ökar också sannolikheten för att de ska kunna välja de kritiska aspekter som ska hjälpa eleverna att förstå lärandeobjektet. I och med att lärandeobjektet är dynamiskt blir lärandet mer effektivt, meningsfullt och fördjupat. (Lo, 2014).

## **2.4.2 Kritiska aspekter**

Med kritiska aspekter menas de aspekter som eleverna behöver få syn på för att kunna förstå lärandeobjektet. När man påbörjar en Learning study försöker lärarna förutsäga vilka de kritiska aspekterna kommer vara. Dessa kallas för hypotetiskt kritiska aspekter. När lärarna ska försöka ta reda på vilka dessa skulle kunna vara brukar diskussionen kretsa kring dessa frågor: Vad är det våra elever brukar ha svårt för? Vilka felsvar kan vi få? Vad får vi inte ta för givet? (Magnusson & Maunula, 2011) Att komma åt dessa aspekter är det mest centrala och kanske också det svåraste i en studie. Det är även med dessa aspekter som grund som lärarna utformar studiens förtest. I analysen av elevernas svar i förtestet kan lärarna sedan få en lite tydligare bild av om dessa hypotetiskt kritiska aspekter stämmer eller om det finns några som de inte alls kunnat ana. Även under lektionernas gång så kan nya kritiska aspekter tillkomma medan vissa, som lärarna trodde var kritiska, kan visa sig inte alls vara det. (Häggström m fl. 2012)

## **2.4.3 Variationsmönster**

Med variationsmönster menas de mönster utefter vilka man varierar innehållet i undervisningsmomentet för att synliggöra de kritiska aspekterna för eleverna (Häggström m fl. 2012). Att använda sig av variationsmönster innebär att medvetet och systematiskt använda sig av variation för att öka lärandet (Magnusson & Maunula, 2011). I undervisningen under en Learning study arbetar lärarna för att de kritiska aspekterna ska kunna urskiljas av eleverna. Variationsteorin utgår ifrån att det som varierar mot en konstant bakgrund är det som blir urskiljt.

När ett variationsmönster planeras utgår lärarna ifrån att skapa antingen kontrastering eller generalisering. Kontrastering innebär att göra det möjligt för eleverna att urskilja en ny aspekt genom att variera denna medan alla andra aspekter hålls invarianta. Efter kontrastering kommer generalisering. När en ny aspekt har urskiljts så hålls denna konstant och det andra varierar så att olika situationer där aspekten förekommer kan urskiljas (Bergqvist & Echevarría, 2011; Lo 2014). Efter kontrastering och generalisering brukar man använda sig av variationsmönster som kombinerar dessa. Detta variationsmönster kallas för fusion och dess avsikt är att flera aspekter som tidigare urskiljts separat, blir synliga samtidigt och i förhållande till varandra (Häggström m fl. 2012).

### 3. Design och metod

Här kommer vi att beskriva hur en Learning study genomförs samt hur vi i förhållande till detta har gått till väga. Slutligen presenteras de etiska aspekter som vi tagit hänsyn till under studien.

#### 3.1 Learning study

En Learning study genomförs vanligen av en grupp om 3-4 lärare som undervisar i samma ämne, och två eller fler forskare. Studien kräver att man kan genomföra 3-5 försökslektioner i 3-5 olika klasser, dessa klasser bör gå i samma årskurs och undervisningsinnehållet ska vara anpassat för den aktuella årskursen. En Learning study kräver ca 10 planeringsträffar á 1,5-2 timmar, den är där med sagt förhållandevis tidskrävande. (Bergqvist & Echevarría, 2011; Lo, 2014)

En Learning study följer en tydlig, strukturerad och cyklisk arbetsgång det innebär att vissa moment reflekteras, revideras och upprepas. Nedan följer en lista över den struktur som studien genomförs efter (Häggström m fl, 2012; Bergqvist & Echevarría 2011).

1. Lärandeobjekt bestäms och avgränsas.
2. Förtest.
3. Analysera förtest.
4. Planera lektion.
5. Genomföra lektion (lektionen filmas).
6. Eftertest.
7. Analysera lektion (film) och eftertest.  
(Punkt 4-7 upprepas 3-5 ggr).
8. Sammanfatta och dra slutsatser.
9. Rapportera resultat.

Här finns anledning att presentera hur man vet när en studie är klar, Bergqvist och Echevarría, (2011) menar att det ofta krävs tre till fem försökslektioner för att nå ett resultat som man kan

vara nöjd med. Enligt dem innebär ett sådant resultat att det är någonstans mellan 80-100% av eleverna som klarar uppgifterna på eftertestet. För att nå detta resultat är det oerhört viktigt att fokusera på undervisningens innehåll, *lärandeobjektet* och elevernas förståelse av det som ska läras. Vilka aktiviteter och material som används är underordnat innehållet. (Bergqvist & Echevarría, 2011).

Vi har genomfört denna Learning study i tre klasser i årskurs 3, på två olika skolor. Dessa klasser går alla på skolor i områden utanför en större stad. I dessa områden har en stor andel av invånarna svenska som andraspråk och detta avspeglas därför även i klassrummen. Vi tycker att det var viktigt att göra ett noggrant urval, för att på så sätt skapa så liknande förutsättningar som möjligt för de tre lektionerna. Det är även viktigt då vi i den tidigare forskningen (Jones, 2007) fått insikt om att det valda lärandeobjektet innebär problematik såväl språkligt som matematiskt. Det var därför viktigt för oss att klasserna var så homogena som möjligt ur detta avseende.

Vi har i detta fall utgjort lärargruppen och har därmed planerat, genomfört samt analyserat allt material i studien. Vi kommer båda från en liknande bakgrund, och har genomgått grundskola samt gymnasium samtidigt och har därför influerats av de då rådande styrdokumentet för skolan. Vi har genomfört vår universitetsutbildning tillsammans och har därför har vår syn på undervisning formats på liknande sätt. De erfarenheter som vi har hittills kommer ifrån vår verksamhetsförlagda utbildning och vi har således ännu ingen arbetslivserfarenhet inom yrket. Alla dessa faktorer påverkar studiens planering, genomförande och analys och vi vill därför belysa dessa. Till vår hjälp har vi haft en handledare som forskar inom matematikdidaktik och har erfarenhet av metoden Learning study.

Hela studien, från förtest till analys av det sista eftertestet, har genomförts under sju veckor. Vi kommer i arbetet att kalla klasserna för *klass 1*, *2* och *3*. Det innehåll som är kopplat till *klass 1* benämns därför som *planering 1* och så vidare. Övningarna inom lektionerna som tillhör *lektion 1* kallas för *övning 1.1*, *övning 1.2*..., detsamma gäller för *klass 2* och *3*.

## 3.2 Metodens etiska aspekter

När forskning sker i skolan är det bland annat viktigt att ta hänsyn till etikprövningslagens regler om samtycke. I denna studie, som involverar barn under 15 år, innebär det att vi sökt tillstånd om elevernas medverkan i studien hos deras vårdnadshavare. Eleverna informerades muntligen om studien och vårdnadshavarna informerades via brev som skickades hem med eleverna. I brevet informerade vi om vem som skulle genomföra studien, varför den skulle genomföras, att vi skulle filma och hur det filmade materialet skulle användas. Via detta brev gav vård

nadshavarna sitt samtycke eller ej. De elever vars vårdnadshavare inte godkände att eleverna filmades deltog i lektionen men blev inte filmad. (Codex, 2014)

## 4. Tillvägagångssätt

I det här avsnittet kommer vi presentera hur vi har gått tillväga. Vi presenterar vårt lärandeobjekt, de hypotetiskt kritiska aspekterna samt utformning av studiens för- och eftertest. Slutligen följer de lektionsplaneringar som vi har utformat och arbetat efter. I planering 1 presenterar vi de ursprungliga övningarna och under planering 2 och 3 beskriver vi de förändringar som gjorts efter analys av föregående lektioner.

### 4.1 Lärandeobjekt

Under ett av våra första handledningsmöten diskuterades inom vilken matematisk gren vår studie skulle genomföras. Vi kom fram till “grundläggande sannolikhet” som det övergripande ämnet för studien och under detta möte berördes också det som skulle komma att bli Learning studyns lärandeobjekt. Nämligen elevernas förmåga att urskilja *större*, *mindre* eller *lika stor chans* i vissa givna situationer. Eftersom vår förståelse för elevernas förkunskaper i ämnet var begränsad genomförde vi en diagnos om sannolikhet i klasserna. Vi valde att använda Skolverkets diagnosmaterial, Diamantdiagnos, då vi tidigare kommit i kontakt med detta. Samtliga elever som medverkat i studien genomförde diagnosen (SA3). Med hjälp av resultatet från diagnosen och samtal med elevernas respektive klasslärare kunde vi konstatera att innehållet var för svårt för eleverna och att det var nödvändigt att börja på en mer grundläggande nivå. Parallellt med att vi konstruerade för- och eftertestet arbetade vi med att precisera lärandeobjektet och dess hypotetiskt kritiska aspekter.

### 4.2 Hypotetiskt kritiska aspekter

Med hjälp av diagnoserna, samtal med klasslärarna och den forskning som vi tidigare presenterat kring undervisning i sannolikhet, försökte vi förutsäga och ringa in olika hypotetiskt kritiska aspekter. Det som vi först resonerade fram som en hypotetiskt kritisk aspekt var elevernas förmåga att skilja mellan en slumpmässig och en icke slumpmässig situation. En andra hypotetiskt kritisk aspekt var antalets betydelse för huruvida chansen är *större*, *mindre* eller *lika stor*.

### 4.3 För- och eftertest

Förtestets syfte är att vi ska få syn på hur eleverna ser på och uppfattar det valda innehållet, lärandeobjektet, och om de hypotetiskt kritiska aspekterna är kritiska eller om det finns andra aspekter av lärandeobjektet som eleverna finner svåra. Det är också ett viktigt instrument för

att kunna analysera huruvida undervisningen har någon effekt på elevernas förståelse och kunskap kring lärandeobjektet och i så fall, i vilken utsträckning.

Nedan följer en förklaring av frågorna i för- och eftertestet. Till varje fråga hör även en följdfråga vars syfte är att eleverna ska förtydliga sina tankar kring *varför* de svarat som de gjort (förtest se bilaga 1). Som Konold m fl (1993) och Watson m fl (1997) påpekar i sina respektive studier så ges man inte tillräcklig insikt i elevernas kunskap utan denna typ av kvalitativa svar (se stycke 2.1 under *Teoretisk anknytning*).

X) Förståelse för egenskaperna hos en icke slumpmässig situation, eftersom skålen endast innehåller kulor av en färg. Om eleverna uttrycker att det finns andra möjliga svar än den färg som finns i skålen, så kan detta bero på något som brukar kallas för känslö- eller ödesrelaterade svar. Dessa svar kan till exempel innebära att eleven tror att dennes favoritfärg plötsligt kan dyka upp ibland kulorna.

A) Denna uppgift syftar till att uppmärksamma eleverna på antalet kulor i skålen.

AA) Förståelse för sambandet mellan antalet kulor och *störst chans* för ett gynnsamt utfall.

B) Förståelse för *lika stor chans* gestaltat med ett annat material. Övningen behandlar antalets betydelse för *lika stor chans*.

C) Förståelse för en situation där två utfall har *lika stor chans*.

CC) Förståelse för att förändring i antalet kulor påverkar chansen för olika utfall.

D) Förståelse för *lika stor chans* gestaltat med ett annat material. Övningen behandlar antalets betydelse för *lika stor chans*. Vår ursprungliga tanke med uppgiften var att beröra elevernas uppfattning kring en av tärningssidornas chans *större*, *mindre* eller *lika stor* gentemot alla de andra sidorna. Det vill säga att tärningssidan med fyra prickar är det gynnsamma utfallet gentemot de övriga fem sidorna. Vi upptäckte under studiens gång att uppgiften kunde uppfattas på ytterligare ett sätt, nämligen som att sidan med fyra prickar har *större*, *mindre* eller *lika stor chans* att visas uppåt som en av de andra.

E) Förståelse för antalets betydelse i förhållande till ett gynnsamt utfall i en situation med fler möjliga utfall.

EE) Förståelse för när det är *lika stor chans* i en situation med fler möjliga utfall.

EEE) Förståelse för att det utfall som är mest sannolikt gentemot de övriga utfallen enskilt, kan ha *mindre chans* gentemot de övriga utfallen sammanlagt.

F) Förståelse för *lika stor chans* gestaltat med ett annat material. Övningen behandlar antalets betydelse för *lika stor chans* och är ett komplement till övning B och D.

#### 4.3.1 Analys av förtest

Klass 2 och 3 genomförde förtestet först och efter detta kunde vi konstatera att det var enkelt för många av eleverna, därför lade vi till de övningar som behandlar tärningen, uppgift B, D och F. Detta innebär att klass 2 och 3 fick genomföra dessa frågor separat vid ett senare tillfälle, cirka en vecka efter det första förtestet. Klass 1 genomförde hela förtestet på samma gång. När alla elever genomfört förtesten påbörjade vi en analys av dessa för att få underlag till den första försökslektionen. Med hjälp av analysen kunde vi urskilja vissa områden som var speciellt problematiska för eleverna.

Följande områden gav upphov till problem för eleverna:

- Många elever svarade rätt på frågorna som berörde *större*, *mindre* eller *lika stor chans*, men få kunde resonera kring varför de angav ett visst svar.
- Under förtestet visade många elever att de inte förstod själva handlingen *att ta en kula ur en skål* och att placering av kulorna på bilderna var avgörande för vilken de "fick upp". Detta kunde avläsas i elevers resonemang från förtestet. "*Det blev en blå kula för att de var högst upp*", denna typ av resonemang fördes av flera elever.
- *Lika stor chans*: som vi nämnt ovan kunde många elever inte förklara varför chansen är *större*, *mindre* eller *lika stor*. Med Konold m fl (1993) och Watson m fl (1997) forskningsresultat (om elevernas benägenhet att uppfatta *lika stor chans* som ett uttryck för slumpen och att allt kan hända) i åtanke menar vi att detta kan vara viktigt att lyfta i undervisningen.
- Många elever visar i förtestet att de tror att vissa sidor av en tärning är lättare att slå. Olika sidor anges i elevsvaren men vi kan tydligt se ett mönster i de tre klasserna där många elever menar att det är lättast och där med *störst chans* att slå en av sidorna. Många menade att 3 och 4 var lättast.
- Flera elever uttrycker att antalet prickar på tärningens respektive sidor ger en summa; ju högre summa desto bättre. Större summa ger därmed *större chans*.
- Eleverna har större svårigheter med att besvara övning E jämfört med övning AA (båda handlar om *störst chans*). Vi menar att en möjlig anledning till detta är att det är fler olika färger på kulorna i fråga E än AA och att detta ger upphov till problem för eleverna.
- Formuleringen av fråga CC och EEE ger upphov till missförstånd. Det innebär att det fanns två sätt att förstå uppgiften och därmed två "rätta" svar..



## 4.4 Planering av försökslektion 1

Nedan kommer vi att presentera och redogöra för de planeringar och förändringar som genomförts från försökslektion 1 till 3.

### Övning 1.1

Vi presenterar ett problem för eleverna som innebär att de ska fundera över vilket utfall som är mest troligt och varför. Dels för att eleverna själva ska kunna se sin egen utveckling från lektionens början till lektionens slut. Men framför allt på grund av de resultat som klass 1 och 3 visade i fråga AA och E på förtestet. Båda frågorna berör *störst chans* men i både klass 1 och 3 svarade betydligt fler elever rätt på fråga AA än fråga E. Fråga E behandlar en situation med fler möjliga utfall än i uppgift AA (se bilaga 1). Utifrån detta skapade vi en uppgift som syftar till att tydliggöra att de (i detta fallet kulorna) som är flest i antal alltid är de som är det mest sannolika utfallet. Följande problem presenteras: *Om det finns 8 blå, 10 vita och 12 orangefärgade kulor i en skål, vilken är det då störst chans att man först tar upp 10 stycken av om man lägger tillbaka kulan när man tagit den och varför tror du det?* Vi valde att kulornas mängder skulle ligga nära varandra i antal därför att vi skulle kunna problematisera kring att det utfall som har sannolikt *störst chans* inte är detsamma som hur utfallet faktiskt blir. Det var inte helt självklart hur denna uppgift skulle genomföras, vi diskuterade möjligheten att tre elever skulle få välja varsin färg i skålen och motivera varför de valde denna färg. Tanken var att vi ville se om den elev som fick välja färg först valde den färg med *störst chans* (orange) och om nästa som fick välja valde den som hade näst *störst chans* (vita). Därefter skulle de övriga eleverna få satsa på den av eleverna som de trodde mest på. Vi tog ett beslut kring övningen och bestämde oss istället för att varje elev skulle få tänka för sig själv och bestämma sig för en färg och komma fram till varför hen valt just den färgen.

### Övning 1.2

Övningen består av fem fall som innebär att kulor läggs i en skål enligt schemat nedan. Elevernas uppgift är att de ska ange vilken färg det är *störst chans* att ta upp och varför de tror det, i de olika fallen. Uppgiften utformades för att belysa innebörden av *störst chans* och antalets betydelse för när det är *störst chans* att, i detta fallet, dra en kula av en viss färg. Genom att hålla de orangefärgade kulornas antal invariant och förändra de blå kulornas antal från att vara obefintligt till att bli flest, hoppas vi belysa antalets betydelse för vilken färg som det är *störst chans* att få upp. Vi vill också ifrågasätta möjligheten att få någon annan färg än orange, i skålen utan blå kulor, och tydligt visa skillnaden på en slumpmässig och en icke slumpmässig situation. Genom att ge eleverna möjlighet att uppfatta hur chansen att ta en blå kula förändras från att vara obefintlig till att bli *lika stor* och tillslut vara *störst* hoppas vi kunna tydliggöra detta.

Figur 1.2

Fall	Orange kulor/ <b>Invariant</b>	Blå kulor/ <b>Varierar</b>	Totalt
1	10	0	10
2	10	1	11
3	10	5	15
4	10	10	20
5	10	20	30

### Övning 1.3

Denna övning skapades för att fokusera på *minst chans*, övningen är uppbyggd och genomförs på samma sätt som övning 2. Elevernas uppgift är att resonera kring vilken färg det är *minst chans* att få och varför det är så. Schemat nedan beskriver variationen av kulorna i skålen.

Figur 1.3

Fall	Vita kulor/ <b>Invariant</b>	Blåa kulor/ <b>Varierar</b>	Totalt
1	10	20	30
2	10	15	25
3	10	10	20
4	10	5	15

### Övning 1.4

I förtestet kan vi uppfatta att uppgifterna som berör *lika stor chans* vållar eleverna i klass 1 och 3 större problem än de uppgifter som berör *större* eller *mindre chans* (se bilaga 4). Elevernas uppgift är att först ange vilken kula det är *störst chans* att få och varför. De får också i uppgift att reflektera över om det är självklart att gissa på ett visst utfall eller om det någon gång under övningen är svårare att välja. Med denna övning vill vi tydliggöra att lika stor chans också har med antal att göra. Genom att hålla de blå kulornas antal invariant och lägga till en kula i taget av de orangefärgade ville vi belysa att det från början är ganska enkelt att ange vilken färg det är *störst chans* att få. Allt eftersom antalet av de båda färgerna blir mer jämt blir utfallet svårare att förutse då det blir mer och mer sannolikt att få vilken som av de båda färgerna. Här menar vi även att det är viktigt att tydliggöra att man (förutsatt att uppgiften är att ta *en* kula ur skålen) antingen kommer att få upp en blå eller en orange kula, *trots* att chansen att få upp de båda färgerna är exakt lika stor.

Figur 1.4

Fall	Blåa kulor/ <b>Invariant</b>	Orange kulor/ <b>Varierar</b>	Totalt kulor
1	5	1	6
2	5	2	7
3	5	3	8
4	5	4	9
5	5	5	10

### Övning 1.5

I förtestet finns tre uppgifter (B, D och F) som behandlar tärningskast. Med utgångspunkt i resultaten och analysen av dessa övningar kunde vi konstatera att tärningen är ett redskap som eleverna har tidigare erfarenhet av. Dessa erfarenheter ger upphov till olika missuppfattningar om tärningen och dess egenskaper. En sådan missuppfattning är att det är lättast att slå 3 eller 4, denna missuppfattning visade sig gälla i alla de tre klasserna. En annan missuppfattning är att varje sidas värde bestämdes av summan av antalet prickar och att större summor vinner över mindre. Med detta i åtanke skapade vi denna övning för att motbevisa dessa missuppfattningar. Vi vill få eleverna att förstå att tärningens sidor inte får olika kraft beroende av sidornas utseende. Därför har vi tillverkat sex kulor (lika många som tärningens sidor) i sex olika färger (rosa, orange, blå, grön, lila och gul). Vi tillverkade också en tärning där varje sida markerades med samma färger som kulorna. Utöver denna tärning planerar vi att använda en ”vanlig tärning”. Tanken med uppgiften är att hålla sannolikheten, en av sex, invariant och variera material för att uppmärksamma eleverna på att markeringarna på tärningens sidor inte har någon betydelse för vilket utfall som är mest sannolikt.

### Övning 1.6

Detta är fortsättning på övning 1.1. Tidigare presenterades den för eleverna, nu ska den genomföras. Vi lägger sammanlagt 30 kulor i skålen och har två kulors skillnad mellan färgerna (8, 10 och 12 stycken), detta för att problematisera kring den ringa skillnaden mellan antalet hos de olika färgerna. Eleverna gissar på vilken färg de tror att vi först får upp tio stycken av, om vi varje gång lägger tillbaka den dragna kulan. Eleverna får även tänka ut varför de väljer just den färgen. Vår förhoppning inför övningen är att det blir förhållandevis jämnt mellan färgerna, sannolikhetsmässigt sett borde det bli så. Syftet med detta är att skapa möjligheter för att diskutera att det som sannolikhetsmässigt sett har *störst chans* inte är detsamma som det verkliga resultatet.

## 4.5 Planering av försökslektion 2

Utifrån lektion 1 kan vi se att vissa variationsmönster var mer gynnsamma än andra, därför har vi behållt vissa övningar men förändrat andra. Nedan följer en beskrivning av de förändringar som gjorts.

### Övning 2.1-2.3

Övningarna är identiska med övning 1.1-1.3

### Övning 2.4

Elevernas uppgift är att besvara om det finns några färger i skålen som det är *lika stor chans* att dra, vilka färger det i så fall är och varför det är *lika stor chans*? Eleverna får även besvara frågor om det finns någon som har *större* eller *mindre chans* att dras och varför. Målet med denna övning är att visa *lika stor chans* på olika sätt men framför allt för att skapa situationer där eleverna kan få syn på att antalet är en avgörande faktor för om det är *lika stor chans* eller ej. Vi bestämde därför en invariant mängd (20) och för att använda oss av samma fyra färger hela tiden. Det som varierar är vilka färger som har *lika stor chans* och färgernas antal i förhållande till varandra. Under utformningen av övningen diskuterade vi risken med att variera flera aspekter samtidigt, därför att det kan bli svårare för eleverna att urskilja den kritiska aspekten. Den kritiska aspekten som vi vill belysa i denna övning är som sagt antalets betydelse för när något har *lika stor chans*, men vi varierar även vilka färger som i de olika fallen har *lika stor chans*. Vi beslutade detta eftersom vi menar att risken med att hålla även färgerna konstanta kan leda till att eleverna får uppfattningen om att vissa färger besitter egenskapen att ha *lika stor chans*. I det första fallet vill vi belysa antalets betydelse för att något ska ha *lika stor chans*, och det i förhållande till två andra mängder som utgör *större* respektive *mindre chans*. Vi ville alltså uppmärksamma skillnaden mellan *störst*, *minst* och *lika stor chans*. I det andra fallet har vi valt att försöka belysa att även om två av färgerna har *lika stor chans* att bli dragna så kan de, förutom att ha *lika stor chans* i förhållande till varandra, även ha *större* eller *mindre chans* i förhållande till de andra färgerna i skålen. I det tredje fallet har alla fyra färger *lika stor chans*. Med detta vill vi visa att att fler än två (i detta fall fyra) mängder kan ha *lika stor chans*, vilket exempelvis kan liknas vid förutsättningarna hos en tärning. I det fjärde fallet finns inga färger som har *lika stor chans*. Vi valde dessa specifika förhållanden för att problematisera att trots att ingen av färgerna är exakt lika många så är det inte så stor skillnad mellan de gröna och de blå eller mellan de vita och de orangefärgade.

Figur 2.4

Fall	Vita/Varierar	Gröna/Varierar	Orange/Varierar	Blå/Varierar	Totalt/Invariant
1	5	5	8	2	20
2	8	2	8	2	20
3	5	5	5	5	20
4	3	7	1	9	20

### *Övning 2.5*

Denna övning är en utveckling av övning 1.5 och utöver det som framgår där vill vi bearbeta likheter och skillnader mellan de båda tärningarna, den "vanliga" och den färgade. Tanken med detta är att eleverna själva ska kunna konstatera vad det är som skiljer tärningarna åt och hur dessa skillnader i så fall kan förändra tärningens fysiska egenskaper. Eleverna ska besvara frågor om likheter och skillnader i den färgade tärningens och den vanliga tärningens utseende, rörelser och användning. Övningen går ut på att eleverna parvis ska diskutera likheter och skillnader för att på så vis uppmana till ett metakognitivt tänkande. Tanken är även att vi efter övning 2.6 ska gå tillbaka till elevernas svar och se vilka av deras "hypoteser" som stämde. Inför denna övning tillverkade vi också stora tärningar (7x7x7 cm) för att eleverna skulle kunna se dem bättre.

### *Övning 2.6*

Vi utformade ett tärningsspel som går ut på att eleverna parvis slår en tärning 40 gånger vardera och antecknar i en tabell hur många gånger de slår respektive sida. Sammanlagt slår klassen cirka 500 slag. När en i varje par slagit sina 40 slag antecknar vi alla dessa på tavlan och går igenom resultatet innan vi fortsätter med de resterande 40 slagen. Eleverna byter nu roller så den som antecknade slår och vice versa. Vi adderar sedan dessa slag till de vi har på tavlan och sammanställer resultatet. Detta gör vi för att visa för eleverna hur jämt fördelade slagen blir när man slår ett stort antal slag. Vår oro inför övningen är att eleverna inte ska uppfatta hur jämn fördelningen faktiskt blir, utan bara se individuella resultat. Om någon sida slås fler gånger, kanske detta bidrar till att förstärka elevernas missuppfattning och på så sätt verka kontraproduktivt. Vi bestämde oss ändå för att genomföra övningen som planerat och förändra den inför lektion 3 om det krävs.

### *Övning 2.7*

Efter att tärningsspelet utvärderats vill vi återkoppla till övning 2.5 och tärningarnas egenskaper. Vi vill återigen undersöka hur eleverna uppfattar den "vanliga" tärningen vi har därför förberett ännu en stor tärning (7x7x7 cm). På den har vi först ritat vanliga tärningsprickar och sedan satt en stor färgad prick över de svarta (med häftmassa) så att den ser ut som den mindre färgade tärningen. Finessen med denna tärning är att vi kan ta bort de färgade prickarna och undersöka om eleverna anser att sidorna ändrar värde när de färgade prickarna tas bort och de svarta prickarna avslöjas. Genom att i en och samma tärning variera sidornas markeringar ger vi eleverna möjlighet att urskilja betydelsen av dessa markeringar, eller snarare bristen på betydelse för sannolikheten hos ett visst utfall.

### *Övning 2.8*

Denna övning planeras att genomföras på samma sätt som övning 1.6.

## 4.6 Planering av försökslektion 3

### Övning 3.1

Denna övning skapades för att svara mot övning 1.2 och 1.3 samt 2.2 och 2.3. Detta medförde att vi i princip har sammanfört de övningar som nämns ovan till en.

Figur 3.1

Fall	Orange kulor/ <b>Invariant</b>	Blå kulor/ <b>Varierar</b>	Totalt
1	10	0	10
2	10	1	11
3	10	5	15
4	10	10	20
5	10	20	30
6	10	10	20

### Övning 3.2

Denna övning är densamma som övning 2.4.

### Övning 3.3

Denna övning är densamma som övning 1.5 och 2.5. Eleverna ska få möjlighet att upptäcka likheter och skillnader mellan de två tärningarna genom att diskutera detta tillsammans med en kamrat.

### Övning 3.4

Detta är samma som övning 2.6. Skillnaden från lektion 2 är att vi nu har valt att kalla övningen för ett tärningsexperiment istället för ett tärningsspel eftersom vi ansåg att en experimentprocess med hypotes och resultat skulle kunna ge eleverna en tydligare bild av vad vi faktiskt gör. Det medför också att eleverna kan ställa en hypotes innan experimentet som vi sedan gemensamt kan diskutera och jämfört med resultatet. Även denna gång diskuterade vi risken med att eleverna tar fasta på differensen mellan de olika antalen slag istället för att generalisera hur jämt fördelade slagen faktiskt är i förhållande till hur många slag som slagits. Denna gång kom vi fram till en eventuell lösning på problemet. Vi utformade (med hjälp av en student från Chalmers Tekniska Högskola) en tärningssimulator som kan användas via en dator. Tärningssimulatorens funktion är så att man skriver in hur många slag man vill simulera, exempelvis 10 000 sedan slumpar datorn dessa och sammanställer resultatet i ett diagram. Eftersom resultatet redovisas i både ett stapeldiagram och med siffror blir det tydligt hur fördelningen ser ut, och eftersom man med simulatorns hjälp kan slå så många slag på så kort tid kan många olika diagram ses och resultatet kan därför generaliseras.

### Övning 3.5

Denna övning består av olika material som kan användas vid olika tillfällen under lektionens gång, eller om de inte givits tillfälle tidigare, efter att tärningssimulatoren använts. De huvudsakliga materialet består av en stor kub (7x7x7 cm) som är helt vit och tanken med övningen är att ifrågasätta egenskaperna som eleverna ger tärningens olika sidor och skapa ett tillfälle där de kan få upptäcka behovet och anledningen till att sidorna är markerade. Övningen går ut på att tärningen visas upp för eleverna och vi frågar om det är någon utav tärningens/kubens sidor som det är *större*, *mindre* eller *lika stor chans* att man får upp och i så fall varför eleverna anser detta. När eleverna har fått uttrycka sina tankar slår vi tärningen. Den sida som kom uppåt visas för eleverna och sedan förbereder man det andra slaget. Även denna gång frågar man om det finns någon sida som det är *större*, *mindre* eller *lika stor chans* att få upp. Vi vill på detta sätt undersöka om eleverna tror att den sida som redan har kommit upp påverkar chanserna vid det andra slaget. Efter det andra slaget uppmärksammar vi problematiken med att vi inte vet vilken av tärningens/kubens sidor som hamnade uppåt i föregående slag. Det vi vill komma fram till är varför sidorna är markerade med olika antal prickar eller färger och att sidorna kan markeras av vilka symboler som helst. Eftersom tärningen är vit kan olika markeringar göras under arbetets gång med tärningen. När denna tärning bearbetats klart finns följande material till förfogande för att ytterligare visa på *lika stor chans*.

- Vanlig tärning.
- Vanlig tärning som är 7x7x7 centimeter.
- Färgad tärning.
- Färgad tärning som är 7x7x7 centimeter där färgerna går att ta bort. Under finns "vanliga" tärningssidor.
- Sex färgade kulor med likadana färger som ovan nämnda tärning.
- Sex kulor med likadana prickar som en vanlig tärning.

Detta material kan användas för att ytterligare poängtera en av de kritiska aspekterna; att tärningens sidor har lika stor sannolikhet att hamna uppåt och att den inte beter sig på olika sätt beroende av sidornas utseende.

### Övning 3.6

Denna övning är samma som övning 1.6 och övning 2.8.

## 5. Resultatredovisning

Under denna rubrik kommer vi att presentera resultatet av studien. Resultatet är uppdelat i två delar, dels resultat av undervisningens utveckling, det vill säga resultatet av de val och förändringar som gjordes från försökslektion 1 till 3 och dels resultat av forskningsfrågor där vi besvarar de frågor vi ställt i början av studien.

### 5.1 Resultat av undervisningens utveckling

De förändringar som vi gjorde efter lektion 1 går att se under planering av lektion 2. Vi vill här sammanfatta förändringarna samt redogöra för resultatet av dessa. Inför denna andra lektion gjorde vi tre förändringar. Dessa innebar att vi ändrade övning 1.4 till övning 2.4 som behandlar *lika stor chans*, utökade diskussionen kring den färgade respektive den vanliga tärningen samt att vi lade till tärningsspelet. Här har vi även anledning att nämna att vi inför eftertest 2 gjorde förändringar i två av uppgifterna. Efter att eleverna i klass 1 hade genomfört eftertest 1 kunde vi dra några slutsatser kring dess utformning. Som vi tidigare uppmärksammat finns det två övningar (övning CC och EEE) som eleverna hade svårt att förstå, vi menar att det beror på frågornas formulering. Vi anade detta redan under genomförandet av förtesten men beslutade oss för att behålla frågorna oförändrade till eftertest 1 med förhoppning om att deras nya insikter från lektionen gjorde att de nu kunde förstå frågorna som vi menade dem. Efter att ha utvärderat eftertest 1 kunde vi dock dra slutsatsen att så inte var fallet. I samråd med vår handledare bestämde vi oss för att justera dessa två frågor i eftertestet. I övning CC bytte vi ut några få ord (jämför övning CC i bilaga 2 och bilaga 3) medan vi formulerade om övning EEE helt och hållet (jämför övning EEE i bilaga 2 och bilaga 3). Detta innebär således att uppgift CC och uppgift EEE i eftertest 1 inte är jämförbara med resultaten i eftertest 2 och 3. Detta förändrade eftertest gjordes två dagar efter den genomförda försökslektionen. När eleverna i klass 2 genomfört det reviderade eftertestet kunde vi konstatera att beslutet att ändra frågorna var rätt, majoriteten av eleverna som svarade på frågan kunde förstå vad vi var ute efter.

Vad gäller övningen (2.4) som behandlar *lika stor chans* så insåg vi när vi analyserade filmen från lektionen att det variationsmönster som vi använde oss av faktiskt inte belyste *lika stor chans* i tillräckligt stor utsträckning. Istället kunde vi se att elevernas fokus fortfarande var på *större* eller *mindre chans*. Vi insåg att övningen kanske snarare problematiserade små skillnader mellan exakt *lika stor chans* och nästan *lika stor chans* än att urskilja antalets betydelse för *lika stor chans*. Därför beslutade vi oss för att utforma ett nytt variationsmönster med större fokus på denna kritiska aspekt. Vi behöll denna övning oförändrad i lektion 3 eftersom vi kunde utläsa av resultaten i eftertest 1 och 2 att fler elever i klass 2 svarade rätt på frågorna gällande *lika stor chans* jämfört med klass 1. I den jämförelsen är vi medvetna om den stora skillnaden i antal elever i de båda grupperna, men vi kan ändå tydligt se en förbättring från lektion 1 till lektion 2 i dessa övningar.



Skillnaden i övning 2.5 gentemot 1.5 som behandlar likheter och skillnader kunde vi se resultat av i eftertesten, där andelen rätta svar efter lektion 2 var högre än efter lektion 1. Häggström m fl (2012) påpekar att man inte får dra för långtgående slutsatser utifrån små skillnader i testresultaten, de menar att skriftliga test alltid innebär ett visst mått av osäkerhet. Vi menar dock att dessa resultat är de vi har att förhålla oss till och utgår ifrån. Därför väljer vi att anta att förändringen i övningens utformning har inneburit att elevernas förståelse för den kritiska aspekt, att tärningens markeringar på sidorna inte påverkar slagets utfall, har förbättrats. Eftersom vi upplevde en förbättring av resultaten i eftertest 2 gentemot eftertest 1 beslutade vi oss för att behålla övningen oförändrad till lektion 3.

Vi lade inför lektion 2 till uppgift 2.6 (tärningsspelet) för att synliggöra att alla tärningens sidor har *lika stor chans* att bli slagna. Detta vill vi uppnå genom att ge eleverna möjlighet att själva erfara en situation där de tydligt kan se att så är fallet. Som nämns i stycket ovan kunde vi se en förbättring av resultaten i uppgifterna i eftertestet som behandlar tärningen (B, D och F). Vad gäller denna uppgift menar vi dock att det framförallt är i filmen som vi kan uppfatta en förändring av tankesättet hos eleverna. Flera elever argumenterar för att en viss sida har större chans, men ger sedan uttryck för att de börjat ifrågasätta sin egen uppfattning och sina egna argument.

Inför lektion 3 förändrade vi följande övningar: Vi tog bort övning 1.1/2.1, vi bildade en ny övning som var sammansatt av övning 1.2+1.3 och 2.2+2.3, vi utformade en tärningssimulator som komplement till övning 2.6 (bildar övning 3.5), vi bytte namn till tärningsexperimentet istället för tärningsspelet och vi skapade ytterligare material för att tydliggöra *lika stor chans* hos tärningen.

Anledningen till att vi tog bort övning 1.1/2.1 var att den, enligt oss, inte tillförde något som de andra övningarna inte behandlade och vi beslutade att istället använda denna lektionstid till att utveckla övningarna angående tärningen. Av samma anledning beslutade vi oss för att sammanföra övning 1.2+1.3 och 2.2+2.3. Vi insåg att dessa båda övningar belyste samma kritiska aspekt och att det inte fanns någon anledning att genomföra båda då en konsekvens av detta blev att eleverna uppfattade övningarna som enformiga och därför blev ofokuserade.

Vi bytte namn på övningen som tidigare kallades för tärningsspelet till tärningsexperimentet för att vi menar att det gav tydligare signaler till eleverna om vad övningen gick ut på. Vi ville i och med det även behandla övningen mer som ett experiment där eleverna fick ställa en hypotes och sedan diskutera resultatet. I samband med denna förändring utformade vi även en tärningssimulator. Detta gjorde vi eftersom vissa elever under vårt experiment gav uttryck för att det faktiskt blev så att vissa sidor visades uppåt fler gånger än andra och de inte kunde se hur små dessa skillnader var i förhållande till antal slag. Vi behövde därför visa att skillnaderna blir ännu mindre vid fler antal slag. Under lektionen drabbades läraren, till följd av att hon tappade fokus och hamnade i tidsbrist, för det som Bergqvist och Echevarría (2011) benämner som en "didaktisk kollaps". Detta medförde att det inte fanns tid till att genomföra

övningen med tärningssimulatore och vi kan därför inte analysera vilket resultat införandet av detta moment skulle kunna ha givit.

Vi utformade även andra övningar med nytt material som skulle kunna användas för att dra paralleller mellan tärningen och de sex olika kulorna (se övning 3.5). På grund av den ovan nämnda didaktiska kollapsen fanns heller inte tid att bepröva detta material och vi kan därför inte analysera hur dess hade kunnat påverka resultatet i eftertestet.

## 5.2 Resultat av forskningsfrågor

Nedan kommer vi att besvara de forskningsfrågor som ligger till grund för studien. Först presenteras vilka aspekter som vi kommit fram till är kritiska för eleverna i de aktuella klasserna. Därefter beskriver vi vilka variationsmönster som varit framgångsrika.

För att förstå resultatens innebörd kommer vi först att sammanfatta och tydliggöra hur lärandeobjektet, de kritiska aspekterna och variationsmönstren hänger samman. Som vi beskriver under rubriken tidigare forskning, *Learning study* och *Variationsteori* påbörjas studien genom att man bestämmer ett lärandeobjekt, det man vill att eleverna ska lära sig. Lärandeobjektet är det centrala och viktiga och alla beslut som fattas kring undervisningens utformning bör svara mot och gynna kunskapsutvecklingen av detta (Bergqvist & Echevarría, 2011). För att förstå lärandeobjektet måste man enligt variationsteorin synliggöra de så kallade kritiska aspekterna, alltså de aspekter av lärandeobjektet som måste förstås för att det ska bli tydligt. För att uppnå ett så effektivt och kvalitativt lärande som möjligt bör man, enligt variationsteorin, presentera de kritiska aspekterna med hjälp av variationsmönster. De kritiska aspekterna tydliggörs genom att systematiskt variera olika aspekter av lärandeobjektet (se vårt tidigare exempel i stycke 2.3 angående urskiljningen av färgen röd). Variationsmönstren utformas för att synliggöra de kritiska aspekterna, de kritiska aspekterna formuleras i sin tur för att lärandeobjektet ska kunna förstås (Lo, 2014).

### 5.2.1 Kritiska aspekter

- Vilka kritiska aspekter kan vi urskilja kring lärandeobjektet, när är det *större*, *mindre* eller *lika stor chans*?

Vi vill påpeka att de aspekter som presenteras här är specifika för de försöksklasser som medverkat i studien och att vi inte har några ambitioner att framställa dessa som generella för undervisning av det aktuella lärandeobjektet.

Vi tog, inför planeringen av förtestet, utgångspunkt i två hypotetiskt kritiska aspekter (HKA) där vi utgick från en mycket grundläggande nivå av sannolikhetslära. Dessa två aspekter var:

HKA1: Vad som är slumpmässig situation och vad som *inte* är det.

HKA2: Antalet kulor påverkar när det är *störst*, *minst* eller *lika stor chans*.

Efter genomförandet av förtesten kunde vi förkasta HKA1 eftersom vi kunde se att alla elever kunde avgöra i vilka av de aktuella situationerna som slumpen var närvarande. Vi kunde se några ytterligare kritiska aspekter (KA) som vi inte tidigare anat, vilket ledde till att vi fortsättningsvis arbetade efter följande kritiska aspekter:

KA1: Antalets påverkan på när det är *störst*, *minst* eller (framförallt) *lika stor chans*.

KA2: Att tärningens markeringar på sidorna inte påverkar slagets utfall.

KA3: Förståelse för innebörden av att dra ett objekt på måfå.

KA4: Sannolikhetsförhållandet mellan två färger påverkas inte av övriga färger i skålen.

Med KA1 menar vi att flera av eleverna visade svårighet att bedöma chans i de frågor som behandlade situationer där två mängder olikfärgade kulor var lika stora samt i övningar med tärningar vars sidor bestod av sex olika symboler. KA2 syftar på de många föreställningar som eleverna visade sig ha kring tärningen och hur den beter sig, exempelvis att visa sidor blir slagna oftare än andra eller att sidan som visar sex prickar ovillkorligt är värd mer än de övriga. Problematiken i KA3 består av att somliga av eleverna svarade att det var lättast att få en kula av en viss färg eftersom de låg överst i skålen, eller kanske låg grupperade. Slutligen så syftar KA4 till de situationer när vi ber eleverna att avgöra vilken av två färger på kulor som har *störst chans* att bli dragen ifrån en skål där ett flertal olikfärgade kulor finns representerade.

De kritiska aspekter som presenteras här uppmärksammades efter att eleverna genomfört förtestet. Vi har under studiens gång förfinat och fått en större förståelse för dem och deras innebörd. Genom att utöka förståelse för dessa har vi, vad gäller KA1 lyckats utforma några variationsmönster som visade sig vara framgångsrika för eleverna förståelse och dessa presenteras i följande stycke. Vad gäller KA2 och KA4 har vi snarare utvecklat förståelse för deras komplexitet och vi har därför bara lyckats påbörja utvecklingen av variationsmönster som skulle kunna bli framgångsrika. Vad gäller KA3 räckte det för de fästa elever att se hur omständigheterna ser ut när denna situation genomförs praktiskt, det var därför inte nödvändigt att utforma något variationsmönster och därför presenteras detta inte heller.

### 5.2.2 Framgångsrika variationsmönster

- Vilka variationsmönster gynnar elevernas kunskapsutveckling inom sannolikhet?

De variationsmönster som presenteras här är mönster som vi testat och upplever gav god effekt på de eftertest som eleverna genomförde. Dessa variationsmönster beskrivs i övning 1.2. Detta kan ses i uppgift AA och E (se bilaga 4). Dessa mönster syftar till att synliggöra

antalets betydelse för *störst* respektive *minst chans*.

- En färg hålls invariant medan den andra färgen varierar i antal, från att vara obefintligt till att vara flest i antal (se figurerna 1.2 eller 2.2).

Ett annat variationsmönster som vi menar var lyckat beskrivs i övning 2.4/3.2. detta mönster skapades inför lektion 2 och berör *lika stor chans*. Detta kan ses i resultaten av eftertesten i klass 2 och 3 uppgift C och EE (se bilaga 4).

- Kulornas färger och de totala antalet hålls invariant och förhållandet mellan antal kulor i de olika färgerna varierar och visar *lika stor chans* på olika sätt (se figurerna 2.4 eller 3.2).

Dessa framgångsrika variationsmönster kan framförallt knytas till KA1 som innebär *antalets påverkan på när det är störst, minst eller (framförallt) lika stor chans*. De övriga kritiska aspekterna skulle, som nämnts, behöva vidareutvecklade variationsmönster för att kunna urskiljas av samtliga elever och presenteras där med inte här.

## 6. Diskussion

Diskussion är uppdelade i en metoddiskussion och en resultatdiskussion. I metoddiskussionen diskuterar vi vilka omständigheter, beträffande metoden, som påverkat arbetet och därmed resultatet och dess tillförlitlighet. I resultatdiskussionen följer analyser av de förändringar som vi genomfört inför de olika försökslektionerna samt vilka slutsatser, eller brist på sådana, som vi kan dra av resultaten från de olika testen. Slutligen har vi ett avsnitt som vi kallar *Fortsatt forskning* där vi diskuterar möjligheter till utveckling av studien.

### 6.1 Metoddiskussion

Vi har strävat efter att skapa så lika förutsättningar för lektionerna som möjligt, dels i vårt urval av klasserna men även i att lektionerna har hållits på samma tidpunkt under dagen samt att eftertesten är genomförda en till två dagar efter undervisningen. Det finns ändå faktorer som kan påverka, till exempel sjukfrånvaro bland eleverna, och i så fall, vilka elever det är som är frånvarande då det kan påverka tillförlitligheten hos resultaten men även gruppdynamiken i klasserna under lektionernas genomförande.

Vi är medvetna om att studiens utförande påverkas till hög grad av att det är just vi som genomför den men vi anser inte att vår bakgrund färgar studiens utgång. Vi anser dock att resultatet påverkas av den ringa yrkeserfarenhet som vi har och att studien kunde sett annorlunda ut om vi haft mer erfarenhet. Vi skulle då haft mer kunskap om

sannolikhetsundervisning ur ett praktiskt perspektiv där vi nu snarare har en teoretisk utgångspunkt. Detta påverkar främst utformandet av lärandeobjektet samt de hypotetiskt kritiska aspekterna och påverkar endast resultatet i att det är annorlunda mot hur det kunde vara om vi haft mer erfarenhet. Det gör alltså inte vårt resultat mindre tillförlitligt. Eftersom användandet av variationsteorin även skulle vara nytt för många lärare med mångårig erfarenhet så anser vi att vår brist på detta inte påverkar utformningen av variationsmönster.

Vi har försökt att genomföra studien på ett så vetenskapligt och teorinära sätt som möjligt men vissa omständigheter kunde vi inte råda över och detta har påverkat studiens resultat och dess tillförlitlighet. Exempel på sådana omständigheter är att förtesten inte kunde utvärderas innan användning och de fick därför revideras under arbetets gång, detta innebar att klass 1 genomförde ett annat, uppdaterat, förtest än de två andra klasserna (som fick göra dessa uppgifter i efterhand). En andra omständighet var att få elever i klass 2 deltog i studiens samtliga delar. En tredje berodde på att genomförandet av den senare halvan av försökslektion 3 inte följde planeringen. På grund av detta menar vi att det finns anledning att diskutera kring resultatets tillförlitlighet. Vi anser trots allt att resultatet är tillförlitligt, då de kritiska aspekter som presenteras var kritiska för eleverna och då de variationsmönster som presenteras var framgångsrika. Vi tror däremot att resultatet, under andra omständigheter, skulle kunna ha blivit mer tillförlitligt men vi menar att dessa två resonemang inte utesluter varandra. Vi kan även se några punkter som om de planerats och genomförts på ett annat sätt hade kunnat innebära att resultaten av studien förbättras ytterligare, somliga hade vi kunnat påverka, andra var utom vår kontroll. Den första är att vi genom att våga ha svårare uppgifter på förtestet hade kunnat undgå problematiken med ett allt för lättförståeligt lärandeobjekt och på så sätt kunnat se större skillnader till eftertestet och då även ökat resultatets tillförlitlighet. Den andra punkten har att göra med de begränsade tidsramarna, om vi haft mer tid så hade vi kunnat testa förtestet i en provgrupp och på så sätt insett att förtestet var för enkelt. Vi hade även kunnat genomföra ytterligare eftertest efter en tid för att se vad eleverna minns när mer tid har passerat sedan lektionen. Detta är olika förslag på förbättringar som skulle kunna innebära att resultatet av studien blev mer tillförlitligt.

### 6.1.1 Lärandeobjektet

Vi har upplevt en viss svårighet i att definiera lärandeobjektet och att uppmärksamma dess förändring under studiens gång. Därför anser vi att en kontinuerlig utvärdering och revidering av lärandeobjektet är av stor vikt under hela arbetsprocessen. Vi menar att vi har haft lärandeobjektet i åtanke men vi inser i efterhand att vi hade behövt återvända kontinuerligt till detta för att försäkra oss om att de val vi gjorde (beträffande undervisningen) grundades i lärandeobjektet. Vi anser ändå att vi har hållit oss till vårt övergripande lärandeobjekt men att vi under studiens gång har skiftat dess fokus från att behandla *större*, *mindre* och *lika stor chans* i samma utsträckning till att främst behandla situationer med *lika stor chans*. Att lärandeobjektet förändras är enligt Häggström m fl (2012) ett vanligt fenomen inom metoden

Learning study och det är inte där problematiken ligger utan snarare i att vi inte har varit uppmärksamma på när det har skett. För att undervisningen ska svara mot lärandeobjektet så är det nödvändigt att beslut som tas rörande dess eventuella förändring är medvetna. Denna brist på medvetenhet från vår sida innebar att planeringen av undervisningen snarare svarade mot de kritiska aspekter som vi funnit och att lärandeobjektet således hamnade i periferin. I vårt arbete innebar detta att lärandeobjektet blev mindre avgränsat under studiens gång. Vi menar att en anledning kan vara att vårt ursprungliga lärandeobjekt var mycket logiskt för eleverna och därför också lättförståeligt (se Fischbein, Pampu & Minzats, 1970). För att anpassa svårighetsgraden utökade vi förtestet (med uppgift B, D och F) och vi menar att uppgifterna som tillkom gav upphov till att lärandeobjektet blev mindre avgränsat.

### 6.1.2 Kritiska aspekter

Den inledande del av studien innebar att vi skulle fastställa de hypotetiskt kritiska aspekterna. Då de kritiska aspekterna utgör en avgörande del inom den här typen av studie innebar det att vi fick sätta oss in i forskning om undervisning i sannolikhet, för att utifrån det kunna urskilja några hypotetiskt kritiska aspekter. Dessa skulle ligga till grund för utformningen av förtestet vars syfte är att undersöka elevernas förförståelse av de hypotetiskt kritiska aspekterna. På grund av de snäva tidsramar som arbetet utfördes inom, utvecklades förtestet under tiden som litteraturen lästes. Därför utformades och genomfördes testet innan vi hade lyckats sammanställa all forskning, det var därför först efter detta som vi kunde ta hjälp av den tidigare forskningen och förtestet för att urskilja de hypotetiskt kritiska aspekterna. De hypotetiskt kritiska aspekterna utformades således av oss, med hjälp av de erfarenheter vi har och den forskning vi hann läsa innan testet genomfördes.

Att utforma testet var helt nytt för oss och vi kände en viss osäkerhet på grund av svårigheten med att urskilja de hypotetiskt kritiska aspekterna, samt om vi skulle lyckas utforma uppgifterna på ett sätt som kunde synliggöra elevernas tankar kring dessa. Huruvida vi hade lyckats med testet eller ej skulle vi först få veta i efterhand. Det fanns inte tid att prova förtestet i en annan elevgrupp innan eleverna i försöksklasserna fick genomföra det. Om det hade varit en möjlighet så tror vi att det hade underlättat arbetet med att fastställa de kritiska aspekterna, och att det dessutom skulle ha inneburit att förtestet kunde reviderats innan det genomfördes i de medverkande klasserna. När eleverna genomfört förtestet kunde vi revidera de hypotetiskt kritiska aspekterna och dessutom söka stöd i de forskningsresultat som vi presenterar under *Teoretisk anknytning*. Konold m fl. (1993) och Watson m fl. (1997) har genomfört två olika studier som båda resulterar i insikten att elever inte resonerar numeriskt när de bedömer om en situation innebär *större* eller *lika stor chans*. I dessa studier kommer de också fram till att elevernas uppfattning av *lika stor chans* är att det uttrycker slump och att vad som helst kan hända. Watson och Moritz (2003) genomförde en intervjuundersökning om tärningens rimlighet, denna studie hjälpte oss att formulera den kritiska aspekt som berör tärningens egenskaper (KA2). Eftersom arbetet med att fastställa de hypotetiskt kritiska

aspekterna hade skapat svårigheter för oss så blev vi mycket nöjda över att kunna urskilja sammanlagt fyra kritiska aspekter. Vi tror att det är ytterligare en anledning till att de kritiska aspekterna fick en så framträdande roll under planeringen av undervisningen.

### 6.1.3 Variationsmönster

Vi har under studien utformat variationsmönster enligt variationsteorin för att genom vår undervisning ge eleverna möjlighet till urskiljning av de kritiska aspekterna. Att arbeta efter variationsteorin och med variationsmönster var helt nytt för oss och vi har under arbetets gång insett hur väl insatt man behöver vara för att med säkerhet utarbeta framgångsrika variationsmönster. Vi har hela tiden upplevt en viss osäkerhet kring om våra variationsmönster är de mest effektiva för den urskiljning som vi vill uppnå och har även resonerat fram några som vi tror skulle kunna vara mer gynnsamma (se avsnittet om *Fortsatt forskning*). De variationsmönster som presenteras i resultatredovisningen var framgångsrika för att de gav eleverna möjlighet till att urskilja den avsedda kritiska aspekten. I resultattabellerna kan vi se att elevernas förmåga att resonera kring de numeriska orsakerna till ett visst utfall utvecklades och därför menar vi att ovan nämnda variationsmönster var framgångsrika. Då tidigare forskning konstaterar att eleverna ofta svarar rätt på uppgifter som behandlar *större* och *lika stor chans* men att deras resonemang inte tar hänsyn till de numeriska orsakerna, menar vi att dessa variationsmönster har utvecklat eleverna försätens framför allt för *varför* det är *större*, *mindre* eller *lika stor chans* för ett visst utfall (Konold m fl, 1993; Watson m fl, 1997)

## 6.2 Resultatdiskussion

Som nämns ovan finns det vissa svårigheter med att dra slutsatser genom att jämföra resultaten från testen klasserna emellan, men vi ska ändå göra ett försök. I resultattabellen (se bilaga 4) för klass 1 kan utläsas att det sker en förbättring av resultatet vad gäller alla uppgifter utom uppgift EEE, där resultatet försämrades. Uppgift EEE var en av de uppgifter som förändrades inför eftertest 2, den andra var uppgift CC, resultaten av dessa övningar kan därför inte jämföras (för att ta reda på hur vår undervisning påverkade elevernas förståelse) med några av de andra eftertesten (2 och 3). Vi kan dock se att beslutet att formulera om uppgifterna (CC och EEE) var gynnsamt. I resultattabellen för klass 1 (bilaga 4) kan också ses att den främsta förändringen mellan förtest 1 och eftertest 1 framgår av hur många elever som resonerar rätt kring uppgifterna snarare än av antal rätta svar. Inför försökslektion 2 gjorde vi några förändringar i planeringen, en av dessa förändringar innebar att övning 1.4, som var tänkt att synliggöra *lika stor chans*, reviderades och presenteras i övning 2.4 och 3.2. Det går inte att utläsa någon tydlig resultatförbättring som kan knytas till den nya uppgiften. Men vi upplevde att den nya övningen berörde *lika stor chans* på ett tydligare sätt än under försökslektion 1.

Genom att avläsa resultattabellen för klass 1 kan vi konstatera att de uppgifter som vållade eleverna störst problem (utöver uppgift CC och EEE) var de uppgifter som behandlar *lika stor chans* konkretiserat med tärningen (B, D och F). Därför ansåg vi att det var viktigt att utveckla de övningar som berörde detta under lektionen. Om man jämför antalet rätt svar och rätt resonemang i eftertesten i resultattabell 1 och 2 så kan man utläsa en viss förbättring i eftertest 2. Eftersom elevantalet i klass 2 är så få i antal är det svårt att dra några slutsatser kring om de nya uppgifternas utformning gav eleverna större möjlighet att uppfatta lärandeobjektet eller om det råkade vara elever som redan tidigare hade förstått.

I klass 2 förbättrades elevernas resultat i samtliga uppgifter från förtest till eftertest (se bilaga 4). Vi har belyst vilka skillnader som gjordes mellan lektion 1 och 2 och hur detta syns i testen. Här följer en analys mellan lektion 2 och 3. En av de förändringar som vi gjorde inför lektion 3 var att sammanfoga de uppgifter som berörde *större* och *mindre chans* (1.2 och 1.3) till en, i resultattabellen för klass 3 (se bilaga 4) syns att detta inte påverkade elevernas förståelse negativt utan att eleverna presterar lika bra nu som vid användningen av de två separata övningarna. Vi planerade att utöka tärningsövningarna ytterligare under lektionen, tyvärr finns det inget vi kan säga om resultatet av dessa övningar då den avslutande lektionens genomförande misslyckades. Läraren drabbades under lektionen av något som Bergqvist och Echevarría (2011) kallar för en “didaktisk kollaps”, detta innebar att de övningar som berörde tärningarna inte genomfördes enligt planeringen. Eleverna i klass 3 presterar sämre än eleverna i klass 2 på samtliga övningar som behandlar tärningskast (B, D och F) om man däremot jämför klass 3 med 1 är deras resultat ungefär lika.

Eftersom det är svårt att jämföra resultaten mellan klasserna innebär det att vi inte kan säga något om hur lektionernas utveckling har påverkat elevernas möjligheter att lära lärandeobjektet. För att man ska våga dra slutsatser om en eventuell förbättring klasserna emellan krävs det större och tydligare skillnader i testresultaten. Små skillnader i skriftliga tester kan bero på mycket annat än att eleverna kan eller inte kan lärandeobjektets innehåll, till exempel tidpunkt på dagen, elevernas “dagsform” eller en olöst konflikt från rasten (Häggström m. fl. 2012). Utifrån Bergqvist och Echevarrias (2011) definition av när studien är klar, det vill säga när 80- 100 % av eleverna besvarar frågorna korrekt, kan vi konstatera att detta nästan uppnås både under lektion 2 och 3, bortsett från uppgift EEE och F (se bilaga 4). Om man jämför de procent elever som klarar uppgifterna på för- och eftertest (se bilaga 4) kan man se att många elever svarade rätt redan under förtesten och att den stora skillnaden som sker är i antalet rätta resonemang. Vi vill avslutningsvis påpeka att resultatet av en Learning study behandlar de specifika försöksklasserna och därför är de resultat som presenteras här inte generella för undervisning om lärandeobjektet, vi tror dock att de kan ses som riktlinjer för vad som kan vara kritiskt för eleverna, och hur denna undervisning kan utformas.



## 6.3 Fortsatt forskning

Förslag till fortsatt forskning innebär för oss två delar. Dels handlar det om möjligheten att, med vår studie som grund, bedriva ytterligare Learning study inom samma ämne och ålder för att på så sätt få en mer generell uppfattning om lärandeobjektets kritiska aspekter samt framgångsrika variationsmönster. Den andra delen som vore en naturlig utveckling av vår studie, och som presenteras nedan, innebär hur vi skulle gått tillväga om vi haft möjlighet att utföra en fjärde lektion inom studien.

Med anledning av det vi tidigare skrivit angående lärandeobjektets benägenhet till att förändras under studiens gång, och om vår osäkerhet kring utvecklingen av vårt eget, vill vi nu diskutera hur vi resonerar kring lärandeobjektets utveckling inför en hypotetisk fjärde lektion. Vi menar, som vi tidigare nämnt, att vi har hållit oss till samma övergripande lärandeobjekt men att innebörden av lärandeobjektet för oss har blivit mindre precist och på så sätt har kommit att innefatta ett större område inom sannolikheten än vad som var vår avsikt. Inför en fjärde lektion ser vi egentligen tre möjliga alternativ. Det första alternativet innebär att vi behåller lärandeobjektet oförändrat och ser till att flytta tillbaka fokus mer från tärningen som redskap och endast använda den som ett komplement till kulorna. Andra alternativet innebär att vi omformulerar lärandeobjektet och använder kulorna som ett komplement för att förstå tärningens slumpmässiga egenskaper. Det tredje alternativet skulle innebära att vi behåller lärandeobjektet oförändrat men att vi helt bortser från tärningen som redskap då vi upplever att den förvirrar snarare än förtydligar förståelsen för lärandeobjektet, om detta skulle behållas oförändrat.

Om vi väljer att behålla lärandeobjektet oförändrat så innebär det att det att vi återigen ger mer plats åt övningarna med kulor och att när vi behandlar tärningen så är det främst för att erbjuda eleverna en verklighetsförankring till slumpmässiga situationer. Vi har under arbetes gång dock insett att tärningen inte fungerar så bra som hjälpmedel för att utveckla förståelsen eftersom det är den som visat sig vara den främsta orsaken till missförstånd kring sannolikhet. Istället ser vi en möjlighet i att förändra lärandeobjektet inför denna hypotetiska lektion och använda oss av kulorna (som de flesta elever inte hade några större problem med) för att utveckla elevernas kunskap om tärningen som redskap och om dess egenskaper. Lärandeobjektet skulle i så fall kunna vara *Tärningens egenskaper ur ett sannolikhetsperspektiv*. En anledning till att vi inte ser det tredje alternativet som det mest fördelaktiga är för att vi, som vi nämnt tidigare, såg i första förtestet att lärandeobjektet då var på för låg nivå för eleverna. Vi valde då att lägga till uppgifter och övningar som behandlade tärningen. I det läget kunde vi även ha valt att försvåra lärandeobjektet genom att skapa mer komplicerade situationer med kulorna men eftersom vi då var helt nya inom ämnet var det svårt för oss att avgöra vad nästa steg skulle vara. Vi ansåg dessutom att tärningen var ett naturligt steg då det är en vanligt förekommande artefakt i elevernas vardag. Om vi då ponerar att vi väljer detta nya lärandeobjekt, *Tärningens egenskaper ur ett sannolikhetsperspektiv*, så har vi två förslag på övningar som vi skulle lägga till/utveckla (som dessutom bättre stämmer överens med

variationsteorin) inför det fjärde lektionen:

Samtidigt som vi visar en vanlig tärning där alla sidor har *lika stor chans* visar vi en specialtillverkad tärning där vissa tal finns representerade flera gånger (exempelvis 1-1-1-1-2-2). Detta för att kunna påvisa en situation när det är *lika stor chans*, och en när det inte är det, parallellt med varandra och på så sätt skapa kontrastering av den kritiska aspekten som innebär att antalet är avgörande för sannolikheten. Detta gör vi för att skapa en möjlighet för eleverna att urskilja vad som ger en situation med *lika stor chans*, och vad som ger en situation med *större/mindre chans*.

Vi hade även kunnat skapa fler variationsmönster med hjälp av tärningen som vi tillverkade som bestod av avtagbara färgade sidor med vanliga tärningsprickar under. Här menar vi att vi skulle ha kunnat stanna upp längre och systematiskt tagit av de färgade sidorna en i taget och flera olika åt gången för att kunna hjälpa eleverna att urskilja den kritiska aspekten som innebär att alla tärningens sidor är likvärdiga och att den inte har några särskilda egenskaper som kan påverka utfallet.

Hade vi istället valt att fortsatt fokusera på kulorna så har vi reflekterat kring andra möjliga variationsmönster och kommit fram till att vi hade velat prova att genomföra en övning med två skålar. Den ena skålen skulle representera en situation där det är *större chans* att få en blå kula än i den andra skålen (exempelvis en skål där 4/10 kulor är blå och en annan där 7/10 kulor är blå) och där elevernas uppgift är att välja den skål som de tror är mest sannolikt att de drar en blå kula ur. Genom att presentera dessa två skålar för eleverna samtidigt så kan vi kontrastera det som skiljer de båda skålarna åt och därigenom ge eleverna möjlighet att urskilja vad som är kritiskt i avgörandet av sannolikheten för att få en blå kula i de båda skålarna.

# Referenslista

Bergqvist, M. & Echevarría, C (2011). En introduktion till learning study. I C. Echevarría, J. Magnusson & T. Maunula (red.), *Learning study – undervisning gör skillnad* (s. 21-34). Lund: Studentlitteratur.

Castro, C. S. (1998). Teaching probability for conceptual change. *Educational Studies in Mathematics*, 35, 233-254

Codex (2014). *Forskning som involverar barn*. Hämtad 2014-05-20, från <http://www.codex.vr.se/manniska1.shtml>

Fischbein, E., Pampu, I. & Minzat, I. (1970). Comparison of ratios and the chance concept in children. *Child Development*, 41, 377- 389.

Häggström, J., Bergqvist, M., Hansson, H., Kullberg, A. & Magnusson, J. (2012). *Learning study – en guide*. Göteborg: Nationellt centrum för matematikutbildning.

Jagers, P. (2005). Slumpen i vardag, samhälle, liv och universum. *Nämnamnaren*, 32(1), 24-27.

Jones, G. A (2007). Research in Probability responding to Classroom realities. F.K. Lester (red.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*. (s. 909–956). Ort: the United States of America.

Konold, C. Pollatsek, A. Well, A. Lohmeier, J. & Lipson, A. (1993). Inconsistencies in students' reasoning about probability. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24, 392-414.

Lester, F.K. (red.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*. Ort: the United States of America.

Lo. M. L. (2014) *Variationsteori – för bättre undervisning och lärande*. Lund: Studentlitteratur.

Magnusson, J. & Maunula, T. (2011). Variationsteori ur ett undervisningsperspektiv. I C. Echevarría, J. Magnusson & T. Maunula (red.), *Learning study – undervisning gör skillnad* (s. 35- 50). Lund: Studentlitteratur.

Marton, F. (2003). Om praxisnära grundforskning. I M. Alexandersson, J. Anward, I. Carlgren, A-C. Evaldsson, I. Josefson m fl. (red.), *Forskning av denna världen II – praxisnära forskning inom utbildningsvetenskap* (s. 105-122). Ort: Uppsala, Vetenskapsrådet.

Hämtad 2014-04-15, från [http://www.cm.se/webbshop\\_vr/pdf/VR\\_2003\\_2.pdf](http://www.cm.se/webbshop_vr/pdf/VR_2003_2.pdf)

Marton, F. & Booth, S. (2000) *Om lärande*. Lund: Studentlitteratur

Maunula, T. (2011) Inledning. I C. Echevarría, J. Magnusson & T. Maunula (red.), *Learning study – undervisning gör skillnad* (s. 13-19). Lund: Studentlitteratur.

Nationellt Centrum för Matematik (NCM) (u.å.) *Learning study-webben*. Hämtad 2014-05-10 från <http://ls.idpp.gu.se>.

Pratts, D. (2005). How do teachers foster students' understanding of probability. I G.A. Jones (red.), *Exploring probability in school: challenges for teaching and learning* (s. 171–189). New York: Springer.

Skolverket. (2011a). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011*. Stockholm: Skolverket.

Skolverket (2011b). *Lesson study och learning study samt IKT i matematikunder visningen En utvärdering av Matematiksatsningen*. Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (2012). *Tid för matematik: erfarenheter från matematiksatsningen 2009–2011*. Stockholm: Skolverket.

Skolöverstyrelsen (1980). *Allmän del. Mål och riktlinjer, kursplaner, timplaner*. Stockholm: LiberLäromedel/Utbildningsförlaget.

Hämtad från <http://ncm.gu.se/media/kursplaner/grund/LLlgr80.pdf>

Stevenson, H. W. & Stigler, J. W. (1992). *The learning gap: why our schools are failing and what we can learn from Japanese and Chinese education*. New York: Summit Books.

Stigler, J. W. & Hiebert, J. (1999). *The teaching gap: best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom*. New York: Free Press.

Watson, J. M., Collis, K.F. & Moritz, J.B. (1997). The development of change measurement. *Mathematics Education Research Journal*, 9, 60-82.

Watson, J.M., & Moritz, J.B. (2003). Fairness of dice: a longitudinal study of students' beliefs and strategies for making judgments. *Journal for Research in Mathematics Education*, 34, 270-304.

# Bilaga 1

Förtest

I den här skålen finns det 10 **röda** kulor.



X) Du blundar och tar upp en kula, vilken färg tror du att det är på den kulan?

---

Varför tror du att det blir den färgen?

---

---

---

I den här skålen finns det 10 kulor.



A) Skriv hur många det finns av varje färg:

\_\_\_\_\_ **blå** kulor

\_\_\_\_\_ **svarta** kulor

\_\_\_\_\_ **röda** kulor

AA) Du blundar och tar upp en kula, vilken färg tror du att det är på den kulan?

---

Varför tror du att det blir den färgen?

---

---

---

I den här skålen finns det 5 gröna och 5 gula kulor.



C) Är det större chans (lättare), mindre chans (svårare) eller lika stor chans (lika svårt) att få en gröna kula som att få en gul kula? Om du blundar och tar upp en kula ur skålen?

---

Varför tror du det?

---



---

CC) Om du tar ut 1 gröna och 2 gula kulor ur skålen, vilken färg är det då störst chans att du får om du blundar och tar upp en till kula?

---

Varför tror du det?

---



---

D) Du ska spela ett tärningsspel. För att vinna behöver du slå 1, 2 eller 3. Din kompis ska slå 4, 5 eller 6 för att vinna. Har du större, mindre eller lika stor chans att vinna som din kompis?

---

Varför tror du det?

---



---



---

I den här skålen finns det 9 **röda**, 2 **blå**, 3 gröna, 4 **gula** och 2 **svarta** kulor.



E) Är det *större* chans att få en **röd** kula än en **blå** om du blundar och tar upp en kula ur skålen?

---

Varför tror du det?

---



---



---

EE) Är det *större*, *mindre* eller *lika stor* chans att få en **svart** kula som att få en **blå** kula? Om du blundar och tar upp en kula ur skålen?

---

Varför tror du det?

---



---



---

EEE) Är det *större*, *mindre* eller *lika stor* chans att få en **röd** kula som att få en kula av vilken annan färg som helst (**blå**, **svart**, **gul** eller **grön**)? Om du blundar och tar upp en kula ur skålen?

---

Varför tror du det?

---



---



---

F) Amir ska spela ett tärningsspel. Det är 3 personer som spelar.

Amir vinner om tärningen visar 1 eller 2  

Sara vinner om tärningen visar 3 eller 4  

Kim vinner om tärningen visar 5 eller 6  

Vem har störst chans att vinna?

---

Varför tror du det?

---

---

---

B) För att vinna ett spel måste du slå 4 på en tärning. Är det *större*, *mindre* eller *lika stor* chans att du slår 4 som att du slår någon av de andra talen på tärningen.

---

Varför tror du det?

---

---

---



## Bilaga 2

### Eftertest (Klass 1)

I den här skålen finns det 10 kulor.



A) Skriv hur många det finns av varje färg:

\_\_\_\_\_ gröna kulor

\_\_\_\_\_ gula kulor

\_\_\_\_\_ svarta kulor

AA) Du blundar och tar upp en kula, vilken färg tror du att det är på den kulan?

\_\_\_\_\_

Varför tror du att det blir den färgen?

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

B) För att vinna ett spel måste du slå 4 på en tärning. Är det *större*, *mindre* eller *lika stor* chans att du slår 4 som att du slår någon av de andra talen på tärningen.

\_\_\_\_\_

Varför tror du det?

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

I den här skålen finns det 5 **rosa** och 5 **blå** kulor.



C) Är det *större*, *mindre* eller *lika stor chans* att få en **rosa** kula som att få en **blå** kula? Om du blundar och tar upp en kula ur skålen?

---

Varför tror du det?

---



---

CC) Om du tar ut 1 **rosa** och 2 **blå** kulor ur skålen, vilken färg är det då *störst chans* att du får om du blundar och tar upp en till kula?

---

Varför tror du det?

---



---

D) Du ska spela ett tärningsspel. För att vinna behöver du slå 1, 2 eller 3. Din kompis ska slå 4, 5 eller 6 för att vinna. Har du *större*, *mindre* eller *lika stor chans* att vinna som din kompis?

---

Varför tror du det?

---



---



---

I den här skålen finns det 9 **rosa**, 2 **lila**, 3 **gröna**, 4 **svarta** och 2 **gula** kulor.



E) Är det *större* chans att få en **rosa** kula än en **lila** om du blundar och tar upp en kula ur skålen?

---

Varför tror du det?

---



---



---

EE) Är det *större*, *mindre* eller *lika stor* chans att få en **gul** kula som att få en **lila** kula? Om du blundar och tar upp en kula ur skålen?

---

Varför tror du det?

---



---



---

EEE) Är det *större*, *mindre* eller *lika stor* chans att få en **rosa** kula som att få en kula av vilken annan färg som helst (**lila**, **gul**, **svart** eller **grön**)? Om du blundar och tar upp en kula ur skålen?

---

Varför tror du det?

---






---



---

F) Amir ska spela ett tärningsspel. Det är 3 personer som spelar.

Amir vinner om tärningen visar 1 eller 2  

Sara vinner om tärningen visar 3 eller 4  

Kim vinner om tärningen visar 5 eller 6  

Vem har störst chans att vinna?

---

b) Varför tror du det?

---

---

---

## Bilaga 3

### Eftertest (Klass 2 och 3)

I den här skålen finns det 10 kulor.



A) Skriv hur många det finns av varje färg:

\_\_\_\_\_ gröna kulor

\_\_\_\_\_ gula kulor

\_\_\_\_\_ svarta kulor

AA) Du blundar och tar upp en kula, vilken färg tror du att det är på den kulan?

\_\_\_\_\_

Varför tror du att det blir den färgen?

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

B) För att vinna ett spel måste du slå 4 på en tärning. Är det *större*, *mindre* eller *lika stor* chans att du slår 4 som att du slår någon av de andra talen på tärningen.

\_\_\_\_\_

Varför tror du det?

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

I den här skålen finns det 5 **rosa** och 5 **blå** kulor.



C) Är det *större*, *mindre* eller *lika stor chans* att få en **rosa** kula som att få en **blå** kula? Om du blundar och tar upp en kula ur skålen?

---

Varför tror du det?

---



---

CC) Om du tar bort 1 **rosa** och 2 **blå** kulor ur skålen, vilken färg är det då *störst chans* att du får om du blundar och tar upp en till kula från skålen?

---

Varför tror du det?

---



---

D) Du ska spela ett tärningsspel. För att vinna behöver du slå 1, 2 eller 3. Din kompis ska slå 4, 5 eller 6 för att vinna. Har du *större*, *mindre* eller *lika stor chans* att vinna som din kompis?

---

Varför tror du det?

---



---



---

I den här skålen finns det 9 **rosa**, 2 **blå**, 6 gröna, 5 **svarta** och 2 **gula** kulor.



E) Är det *större* chans att få en **rosa** kula än en **blå** om du blundar och tar upp en kula ur skålen?

---

b) Varför tror du det?

---



---



---

EE) Är det *större*, *mindre* eller *lika stor* chans att få en **gul** kula som att få en **blå** kula? Om du blundar och tar upp en kula ur skålen?

---

Varför tror du det?

---



---



---

EEE) Maria säger att det är *störst* chans att man får en **rosa** kula om man blundar och tar en kula från skålen. Lucas säger att det är *störst* chans att man får antingen en **svart** eller en **grön** kula om man blundar och tar en kula från skålen. Vem har rätt?

---

f) Varför tror du det?

---





---




---

F) Amir ska spela ett tärningsspel. Det är 3 personer som spelar.

Amir vinner om tärningen visar 1 eller 2  

Sara vinner om tärningen visar 3 eller 4  

Kim vinner om tärningen visar 5 eller 6  

Vem eller vilka har störst chans att vinna?

---

Varför tror du det?

---

---

---



## Bilaga 4

Resultat av för- och eftertest för klass 1 (lektion 1).

Uppgif t	Förtets svar	Resonerar rätt	Rätt svar i %	Eftertest svar	Resonerar rätt	Rätt svar i %
<b>A</b>	17/17	-	100 %	17/17	-	100 %
<b>AA</b>	15/17	10	82 %	17/17	17	100 %
<b>B</b>	14/17	5	82 %	15/17	12	88 %
<b>C</b>	10/17	8	59 %	15/17	15	88 %
<b>CC</b>	9/17	9	47 %	7/17	7	41 %
<b>D</b>	11/17	(2)	65 %	12/17	10	71 %
<b>E</b>	13/17	12	71 %	15/17	14	88 %
<b>EE</b>	9/17	9	47 %	14/17	11	82 %
<b>EEE</b>	1/17	1	6 %	0/17	0	0 %
<b>F</b>	4/17	2	18 %	7/17	7	41 %

Resultat av för- och eftertest för klass 2 (lektion 2).

Uppgif t	Förtest svar	Resonerar rätt	Rätt svar i %	Eftertest svar	Resonerar rätt	Rätt svar i %
<b>A</b>	7/7	-	100 %	7/7	-	100 %
<b>AA</b>	6/7	6	86 %	7/7	7	100 %
<b>B</b>	5/7	4	71 %	7/7	6	100 %
<b>C</b>	6/7	6	86 %	7/7	7	100 %
<b>CC</b>	4/7	4	57 %	6/7	6	86 %
<b>D</b>	6/7	5	86 %	6/7	6	86 %
<b>E</b>	7/7	7	100 %	6/7	6	86 %
<b>EE</b>	6/7	6	86 %	7/7	7	100 %
<b>EEE</b>	1/7	2	14 %	4/7	4	57 %
<b>F</b>	2/7	2	29 %	5/7	5	71 %

Resultat för och eftertest för klass 3 (lektion 3).

Uppgift	Förtest svar	Resonerar rätt	Rätt svar i %	Eftertest svar	Resonerar rätt	Rätt svar i %
<b>A</b>	12/14	-	86 %	14/14	-	100 %
<b>AA</b>	11/14	8/14	79 %	14/14	14/14	100 %
<b>B</b>	2/14	0/14	14 %	13/14	11/14	93 %
<b>C</b>	7/14	3/14	50 %	13/14	13/14	93 %
<b>CC</b>	4/14	3/14	29 %	14/14	14/14	100 %
<b>D</b>	9/14	2/14	64 %	10/14	8/14	71 %
<b>E</b>	13/14	12/14	93 %	14/14	14/14	100 %
<b>EE</b>	8/14	8/14	57 %	13/14	13/14	93 %
<b>EEE</b>	1/14	1/14	7 %	8/14	8/14	57 %
<b>F</b>	1/14	0/14	7 %	6/14	5/14	43 %